Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Introducción a la Física del Estado Sólido
Profesores: Eduardo Menéndez (coordinador)
Sergio Davis, Gonzalo Gutiérrez

Guía 9: Superconductividad Cap. 12 Kittel; Cap. 34 A-M. Lu. 17 Junio 2013

---

1. Explique porqué un superconductor no puede ser descrito, simplemente, mediante las ecuaciones de Maxwell agregando que la resisitividad sea nula.

2. Explique las semejanzas y diferencias entre los superconductores de tipo I y tipo II. ¿Cómo se puede transformar un superconductor tipo I en otro tipo II?

3. En un metal rige la ley de Ohm, es decir $\vec{J} = \sigma\vec{E}$. En un superconductor, de acuerdo con el argumento de London, esta se reemplaza por $\vec{J} = -c\vec{A}$, con $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ y c constante de proporcionalidad positiva.

   Considere el espacio vacio en la región $z < 0$ con la presencia de un campo magnético $\vec{B}$ externo paralelo al plano (x, y), y lleno con un superconductor en la región $z > 0$. Demuestre que la hipótesis de London conduce a una descripción fenomenológica del efecto Meissner. Para ello

   a) Utilice las ecuaciones de Maxwell y la hipótesis de London para encontrar como depende el campo $\vec{B}$ de la coordenada z al interior del superconductor. Encuentre la longitud de penetración λ característica (llamada "de London"), en términos de c y de la permeabilidad magnética μ del material. superconductor.

   b) Utilizando las ecuaciones de Maxwell, demuestre que la densidad de corriente $\vec{J}$ en el superconductor es una corriente superficial.(Sugerencia: encuentre cómo depende la densidad de corriente $\vec{J}$ de la coordenada z al interior de superconductor).

4. Considere una lámina delgada de estaño superconductor (tipo I) de espesor $2a = 10000$ Å. Encuentre una ecuación analítica y dibuje la curva correspondiente, para la penetración de un campo magnético B_a en el interior del superconductor sabiendo que la profundidad de penetración de London es de $\lambda = 510$Åpara el estaño.

5. **Termodinámica del estado superconductor.** El estado de equilibrio de un superconductor en un campo magnético uniforme está determinado por la temperatura T y la magnitud del campo H. (Suponga que la presión esta fija y que el superconductor, un cilindro muy largo, está puesto paralelo al campo, de modo que los efectos de demagnetización son despreciables.) Considere la identidad termodinámica para la energía libre de Gibbs $dG = -SdT - \mathcal{M}dH$, donde S es la entropía y $\mathcal{M}$ la magnetización total (o sea $\mathcal{M} = MV$, con M la densidad de magnetización). Como se mostró en clases, la frontera de las fases entre el estado superconductor (s) y el estado normal (n) en el plano $H - T$ está dado por la curva del campo crítico $H_c(T)$.

   a) Deduzca, utilizando el hecho que G es continuo a través de la frontera de las fases, que

   $$\frac{dH_c(T)}{dT} = \frac{S_n - S_s}{\mathcal{M}_s - \mathcal{M}_n}$$

   (Ecuación de Clausius-Claperyron para superconductor) *b*) Considerando que el estado superconductor presenta diamagnetismo perfecto ($B = 0$), y que el estado normal tiene un diamagnetismo despreciable ($M \approx 0$), muestre que la entropía es discontinua a través de la frontera, en la cantidad

$$S_n - S_s = -\frac{V}{4\pi} H_c \frac{dH_c}{dT},$$

y por tanto el calor latente Q cuando ocurre la transición es

$$Q = -TV \frac{H_c}{4\pi} \frac{dH_c}{dT}.$$

c) Muestre que cuando la transición ocurre a campo cero (o sea, en el punto crítico), el calor específico presenta una discontinuidad dada por

$$(C_p)_n - (C_p)_s = -\frac{T}{4\pi} \left(\frac{dH_c}{dT} \right)^2 .$$

6. Explique, mediante un diagrama de resistividad ρ en función de la temperatura, las semejanzas y diferencias en la resistividad entre un metal normal con un metal que presenta una transición superconductora. Explique (en el marco de la teoría BCS) porqué los superconductores que tiene una temperatura crítica T_c mayor que otros, exhiben una resistividad más elevada que estos últimos a temperatura ambiente, es decir, "mientras mejor superconductor, peor conductor". Por ejemplo, T_c para los elementos Nb, Tc, Pb y Al es de 9.26, 7.77, 7.19, 1.20 K, mientras sus resistividades son de 1.5, 2.0, 2.1, 0.26 $\times 10^{-7}$ m-Ω, respectivamente.

7. Explique porqué la presencia de pequeñas concentraciones de impurezas magnéticas destruyen el estado superconductor.

8. Demuestre que el flujo magnético a alrededor de un anillo superconductor está cuantizado en unidades de un flujo elemental $\phi_0 = h/2e$, donde h es la constante de Planck y e la carga del electrón.

9. Considere un metal superconductor tipo I. Como sabemos, en este caso el efecto Meissner implica expulsión completa del campo magnético $\vec{B}$ del superconductor, siempre que $\vec{B} < \vec{B}_c$. Aquí, $\vec{B}_c$ es el campo crítico, que transforma el metal del estado superconductor al normal. Para estimar su valor, proceda así:

   a) Suponga que el campo magnético crece desde 0 hasta $\vec{B}_c$. Calcule la densidad de energía asociada a este campo magnético $\vec{B}_c$.

   b) Estime la densidad de energía asociada al metal superconductor, es decir, la energía por unidad de volumen que gana el sistema al preferir el estado superconductor en vez del estado normal. El estado superconductor se caracteriza por tener una energía Δ inferior a la energía de Fermi. E_F. Por tanto, la densidad de energía δE que gana el sistema al preferir el estado superconductor es $\delta E = \Delta g(E_F)\Delta/2$, donde $g(E)$ es la densidad de estados por unidad de energía y la densidad de pares de Cooper N_C se ha considerado como $N_C = g(E_F)\Delta/2$ (o sea la mitad de la densidad de electrones situados en un cascarón de espesor Δ por debajo del nivel de Fermi).

   c) Igualando las expresiones de densidad de energía obtenidas en *a*) y *b*), determine $\vec{B}_c$ en función de E_F, la densidad de electrones en el estado normal y de la brecha de energía Δ que caracteriza al estado superconductor.