Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática I
Profesor: Eduardo Menéndez
Ayudante: Dany López

Guía 1: Notación de Einstein

Jueves 14 Marzo 2013

Problemas ayudantía: 1) a,b,c 2) a,b 3) c 4) a,b,c,d,e,f 5) 7)

Notación de Einstein

1. Desarrollar (expandir) las siguientes expresiones considerando $1 \leq i \leq 3$ y $1 \leq j \leq 3$.

   a) $u_i v_i w_j \hat{e}_j$

   b) $T_{ij} v_i \hat{e}_j$

   c) $T_{ii} v_j \hat{e}_j$

2. Dadas las siguientes expresiones en notación de Einstein, expandirlas y relacionarlas con alguna expresión matemática conocida, considerando $1 \leq i \leq 3$ y $1 \leq j \leq 3$.

   a) $\frac{\partial f}{\partial x_i} \hat{e}_i$

   b) $\left(\hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot (A_j \hat{e}_j)$

   c) $\left(\hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \times (A_j \hat{e}_j)$

3. Escribir en notación de Einstein las siguientes expresiones:

   a) $a_1 x_1 x_3 + a_2 x_2 x_3 + a_3 x_3 x_3$

   b) $x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3 + x_4 x_4$

   c) $\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & = & b_x \\ a_{21}x & + & a_{22}y & + & a_{23}z & = & b_y \\ a_{31}x & + & a_{32}y & + & a_{33}z & = & b_z \end{array} \right.$

4. Escribir las siguientes expresiones utilizando notación de Einstein

   a) df (diferencial total de una función f)

   b) $\frac{df}{ds}$ (derivada total de una función f respecto a una variable arbitraria s)

   c) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

   d) $\lambda \vec{v}$

   e) AB^T

   f) $Tr(AB)$

5. Probar que el determinante

$$detA = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

   se puede expresar de la forma $det[A] = \epsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$

6. Usando la propiedad anterior, pruebe que

   a) $\vec{A} \times \vec{B} = \epsilon_{ijk}\hat{e}_i A_j B_k$

   b) $\nabla \times \vec{B} = \epsilon_{ijk}\hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} B_k$

   Delta de Kronecker y notación de Einstein

7. Establecer la identidad

$$\epsilon_{pqs}\epsilon_{mnr} = \begin{vmatrix} \delta_{mp} & \delta_{mq} & \delta_{ms} \\ \delta_{np} & \delta_{nq} & \delta_{ns} \\ \delta_{rp} & \delta_{rq} & \delta_{rs} \end{vmatrix}$$

   (Hint: utilice el determinante del ejercicio 6, intercambie filas y columnas de la manera más conveniente, luego concluir el resultado utilizando las propiedades de determinantes junto con un cambio de variable pertinente).

   Luego usando lo anterior, demuestre la siguiente propiedad

$$\epsilon_{pqs}\epsilon_{snr} = \delta_{pn}\delta_{qr} - \delta_{pr}\delta_{qn}$$

8. Demuestre las siguientes propiedades

   a) $\delta_{3p}v_p = v_3$

   b) $\delta_{3i}A_{ji} = A_{j3}$

   c) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{pjk} = 2\delta_{ip}$

   d) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$

   e) $\epsilon_{ijk}(v_k u_3 \delta_{i1}\delta_{j2} + v_j u_2 \delta_{i1}\delta_{k3} + v_i u_1 \delta_{j2}\delta_{k3}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$

9. Desarrolle y calcule

   a) $\delta_{ij}\epsilon_{ijk}$

   b) $\delta_{i2}\delta_{j3}A_{ij}$

   c) $\delta_{ii}\delta_{jj}$

   d) $\delta_{\alpha 1}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\gamma 1}$

   e) $\epsilon_{ijk}v_i v_j b_k$

10. Demostrar las siguientes identidades utilizando notación de Einstein.

   a) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

   b) $\nabla \cdot \left(f\vec{A}\right) = \vec{A} \cdot (\nabla f) + f\left(\nabla \cdot \vec{A}\right)$

   c) $\nabla \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \vec{B} \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) - \vec{A} \cdot \left(\nabla \times \vec{B}\right)$

   d) $\nabla \times \left(f\vec{A}\right) = f\left(\nabla \times \vec{A}\right) - \vec{A} \times (\nabla f)$

   e) $\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) = 0$

   f) $\nabla \times (\nabla f) = 0$