

Guía 10

Viernes 31 de mayo de 2013

Problemas ayudantía: 2, 3, 6, 12c, 13, 15, 22 .

Tarea:

Convergencia de Series

1. Verificar

$$\begin{aligned}\cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

Luego, probar que $\cosh' z = \sinh z$ haciendo uso de las anteriores series.

2. Probar que para todo z se tiene

$$e^z \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n/2} \sin(n\pi/4)}{n!} z^n$$

3. Determine los primeros términos de la serie en potencias de z para $\tan z$, conociendo las series respectivas para $\cos(z)$ y $\sin(z)$.

$$\frac{\sin z}{\cos z} = \tan z = \sum_{s=0}^{\infty} t_s z^s \quad (1)$$

Hint: de la ecuación (1) se tiene que

$$\sin z = \cos z \sum_{s=0}^{\infty} t_s z^s \quad (2)$$

De aquí, con las series de $\sin z$ y $\cos z$, se pueden identificar los coeficientes t_s .

Series de Taylor

- Desarrollar $f(z) = e^{-z}$ en una serie de Taylor alrededor de $z = 0$.
- Desarrollar $f(z) = \frac{1}{1+z}$ en una serie de Taylor alrededor de $z = 1$.
- Desarrollar $f(z) = ze^{2z}$ en una serie de Taylor alrededor de $z = -1$.
- Considere que cada una de las siguientes funciones se puede desarrollar en una serie de Taylor para los puntos indicados, ¿Cuál sería la región de convergencia en cada caso?

a) $\frac{\sin z}{(z^2+4)}$, $z = 0$

b) $\frac{z}{(e^z+1)}$, $z = 0$

c) $\frac{z+3}{(z-1)(z-4)}$, $z = 2$

d) $e^{-z^2} \sinh(z+2)$, $z = 0$

- Desarrollar $f(z) = \sin z$ en una serie de Taylor alrededor de
 - $z = 0$ y determinar su región de convergencia.
 - $z = \pi/4$ y determinar su región de convergencia.

- Considere la función

$$f(z) = -\frac{z}{(z-3)(z-4)}$$

- Encuentre la serie de Taylor alrededor de $z_0 = 0$, especificando su región de validez.
- Encuentre la serie de Taylor alrededor de $z_0 = 1$, especificando su región de validez.
- Encuentre la serie de Taylor alrededor de $z_0 = 2$, especificando su región de validez.

- Considere la función

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

- Determine la expansión de Taylor en $z = 0$ e indique la región de convergencia.
- Determine la expansión de Taylor en $z = 1 + i$ e indique la región de convergencia.

- Sea $f(z) = \text{Arcsin } z$ que toma el valor cero para $z = 0$, mostrar que

$$\text{Arcsin } z = z + \frac{1}{2} \frac{z^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{z^5}{5} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \frac{z^7}{7} + \dots$$

considerando que $|z| < 1$.

Series de Laurent

12. Encontrar la serie de Laurent, indicando la región de convergencia, para las siguientes funciones

a) $f(z) = \frac{1}{z-3}$, centrada en $z = 3$.

b) $f(z) = \frac{1}{z}$, centrada en $z = 0$ y luego en $z = i$.

c) $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$, centrada en $z = 0$ y luego en $z = 1$.

d) $f(z) = \frac{1}{z^3(1+z)}$, centrada en $z = 0$ y luego en $z = -1$.

e) $f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$, centrada en $z = 0$ y luego en $z = i$.

f) $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$, centrada en $z = 0$ y luego en $z = 2$.

13. Encontrar la serie de Laurent, indicando la región de convergencia, para la siguiente función

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$$

a) centrada en $z = 0$.

b) centrada en $z = -2$.

c) centrada en $z = -1$.

14. Considere la siguiente expansión en serie

$$f(z) = -\frac{1}{b-a} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{z^n} \right)$$

para $a < |z| < b$.

a) Encuentre la función que representa la anterior expresión.

b) Considerando la función encontrada, escriba los desarrollos de Laurent para $|z| < a$ y $|z| > b$ con $a < b$.

15. Demuestre la siguiente representación en serie de Laurent, especificando su radio de convergencia

$$z^3 \cosh \frac{1}{z} = \frac{z}{2} + z^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)!} \frac{1}{z^{2n-1}}, 0 < |z| < \infty$$

16. Escriba las series de Laurent, indicando la región de convergencia, para

$$f(z) = \frac{1}{z^4 - 3z^3 + 2z^2}$$

17. Determine la Serie de Laurent para

$$f(z) = (z-1)^2 e^{\frac{1}{z-1}}$$

Hint: Considere la serie para e^w y haga la sustitución $w = 1/(z-1)$

Convergencia Absoluta y Uniforme

18. Probar que la siguiente serie converge absolutamente para $|z| \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$$

19. Encontrar la región de convergencia de las siguientes series

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)34^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$

Integración y Derivación de Series de Potencias

20. Sea $f(z) = \ln(1+z)$, donde se considera la rama que toma el valor cero cuando $z = 0$.

a) Desarrollar $f(z)$ en una serie de Taylor alrededor de $z = 0$.

b) Determinar la región de convergencia para la anterior serie.

c) Desarrollar $\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ en una serie de Taylor alrededor de $z = 0$.

21. Sea f una función analítica en un dominio anular ($R_1 < |z - z_0| < R_2$) en torno del origen que contiene al círculo unidad $z = e^{i\phi}$ ($-\pi \leq \phi \leq \pi$). Tomando ese círculo como camino de integración para obtener los coeficientes a_n y a_{-n} en una serie de Laurent en potencias de z , probar que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi}) d\phi + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi}) \left[\left(\frac{z}{e^{i\phi}}\right)^n + \left(\frac{e^{i\phi}}{z}\right)^n \right] d\phi$$

cuando z es cualquier punto del dominio anular.

22. Calcular

$$g(z) = \int_0^z f(s) ds$$

considerando que

$$f(s) = \begin{cases} \frac{\sin s}{s} & , s \neq 0 \\ 0 & , s = 0 \end{cases}$$