Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática I
Profesor: Eduardo Menéndez
Ayudante: Dany López

Guía 2: Introducción a tensores
Viernes 22 Marzo 2013

---

1. Dada la igualdad
$$b'_i = S_{ij} R_{jk} b_k$$
donde $S_{11} = 1$, $S_{12} = 4$, $S_{21} = 0$, $S_{22} = 1$ y $R_{11} = 1$, $R_{12} = -4$, $R_{21} = 0$, $R_{22} = 1$, obtenga el tensor b' y especifique si es un escalar, vector o matriz.

Notación Tensorial

2. Expresar las siguientes matrices en notación tensorial.

   a) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

3. Para los siguientes tensores, decir su orden y la dimensión de cada uno de sus vectores base.

   a) T

   b) $T_i \hat{e}_i$, $1 \leq i \leq 3$

   c) $T_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j$, $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 2$

   d) $T_{ijk} \hat{e}_i \hat{e}_j \hat{e}_k$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$, $1 \leq k \leq 3$

   e) $T_{ijkl} \hat{e}_i \hat{e}_j \hat{e}_k \hat{e}_l$, $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 4$, $1 \leq k \leq 4$, $1 \leq l \leq 4$

Producto entre Tensores

4. Determinar el orden del tensor obtenido en las siguientes operaciones.

   a) $C_i A_i$

   b) $T_{ij} S_{jk}$

   c) $A_i B_j$

   d) $A_i B_i T_{jk}$

   e) $C_j S_{jk}$

   f) $A_{ii} S_{jk}$

   g) $S_{ijk} T_{lm}$

Transformaciones entre Sistemas Cartesianos

5. Obtener la matriz de transformación de coordenadas que relaciona el sistema prima con el sistema no prima de la Figura 1. Luego, obtener la matriz de transformación de coordenadas inversa. Por último, escribir ambas matrices en notación de Einstein.

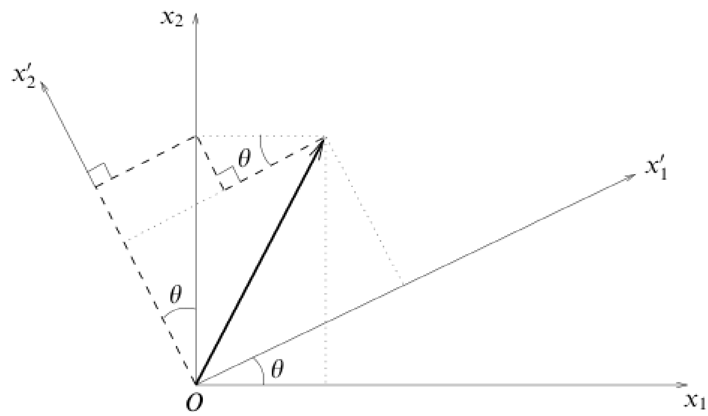


Figura 1: Sistemas prima y no prima.

6. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, identifique los elementos de la matriz de transformación desde el sistema no primado al sistema primado. Posteriormente, utilizando los elementos encontrados, formar la matriz. Luego, obtener la transformación inversa. Finalmente, para una base ortonormal en el sistema no primado, probar si las transformaciones conservan la ortonormalidad de ella.

   a) $x'_1 = 1/\sqrt{3}x_1 + 1/\sqrt{3}x_2 + 1/\sqrt{3}x_3$, $x'_2 = 1/\sqrt{2}x_2 - 1/\sqrt{2}x_3$, $x'_3 = 2/\sqrt{6}x_1 - 1/\sqrt{6}x_2 - 1/\sqrt{6}x_3$

   b) $x'_1 = 6/\sqrt{5}x_1 - 2x_2$, $x'_2 = 1/\sqrt{3}x_1 + 7/\sqrt{6}x_2 - x_3$, $x'_3 = x_1 + x_2 + x_3$

   c) $x'_1 = \sqrt{2}/2x_1 + \sqrt{2}/2x_2$, $x'_2 = \sqrt{2}/2x_1 - \sqrt{2}/2x_2$, $x'_3 = x_3$

7. Sea el vector $\vec{v} = 4\hat{e}_1 + 8\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3$ expresado en un sistema de coordenadas no primado.

   a) Exprese este vector en el nuevo sistema de coordenadas primado obtenido de la relación $x'_1 = \cos\psi x_1 + \sin\psi\cos\theta x_2 + \sin\psi\sin\theta x_3$, $x'_2 = -\sin\psi x_1 + \cos\psi\cos\theta x_2 + \cos\psi\sin\theta x_3$ y $x'_3 = -\sin\theta x_2 + \cos\theta x_3$.

   b) Sean $\theta = \pi/2$, $\psi = \pi/4$ y el vector $\vec{v}' = -4\hat{e}'_1 + 2\hat{e}'_2 + 2\hat{e}'_3$. Exprese este vector en el sistema de coordenadas no primado.

   c) Para los valores anteriores de θ y ψ, transformar la base canónica del sistema no primado al sistema primado. Luego, verificar si esta nueva base es ortonormal. Repetir el procedimiento partiendo de la base canónica del sistema primado.

   d) Nuevamente para los valores anteriores de θ y ψ, muestre que la matriz de transformación entre los sistemas de coordenadas es ortogonal.

8. Escribir, utilizando notación tensorial, la transformación requerida para expresar los siguientes tensores en un sistema primado. Esto es, llevarlos de T a T'. Posteriormente, escribir la

transformación inversa (de T' a T). Nota: Considerar que los sistemas primado y no primado están dados en bases ortonormales.

a) $T_i\hat{e}_i$

b) $T_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j$

c) $T_{ijk}\hat{e}_i\hat{e}_j\hat{e}_k$

d) $T_{ijkl}\hat{e}_i\hat{e}_j\hat{e}_k\hat{e}_l$

9. Expresar, si es posible, las siguientes matrices (representaciones de tensores de orden 2) en un sistema de coordenadas donde posean forma diagonal. Además, especificar una base de tal sistema.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ -4 & -3 & -2 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

10. Demostrar que $T'_{ij} = a_{ir}a_{js}T_{rs}$ es equivalente a la expresión matricial $[T'] = [A][T][A^T]$, para $i, j, r, s = 1, 2$.

Pseudo-objetos

11. Para cada uno de los siguientes vectores, decir si es un vector axial o polar.

a) Torque $\vec{\tau}$

b) Vector Desplazamiento $\vec{r}$

c) Campo Magnético $\vec{B}$

d) Momento Angular $\vec{L}$

e) Campo Eléctrico $\vec{E}$

12. Para cada una de las siguientes matrices de transformación, verificar si ellas conservan la orientación (derecha o izquierda) de la base dada por $\hat{e}_1 = \hat{x}$, $\hat{e}_2 = \hat{y}$, $\hat{e}_3 = \hat{z}$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

13. Sean los vectores $\vec{v}_1 = 2\hat{x} + 2\hat{y}$ y $\vec{v}_2 = \hat{x} + \hat{z}$ dados respecto al clásico sistema de coordenadas cartesiano.

    a) Suponer que el sistema de coordenadas es transformado mediante la matriz del ejercicio 12*a*. Expresar $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ respecto al nuevo sistema y calcular su producto cruz (es decir, $\vec{v}_1' \times \vec{v}_2'$). Posteriormente, calcular el producto cruz en el sistema original (es decir, $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$). Los vectores obtenidos de los productos cruz, ¿son los mismos en ambos procedimiento? ¿Se podía predecir este resultado?

    b) Repetir el procedimiento utilizando la matriz del ejercicio 12*c*.

Problemas adicionales

14. Dada la transformación del ejercicio 5

    a) Exprese el vector $\vec{V} = 3\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2$ en el sistema $x'y'$.

    b) Exprese el tensor $\overleftrightarrow{T} = ij\hat{e}_i\hat{e}_j$ en el sistema $x'y'$.

15. Considere un tensor de conductividad de un conductor planar (por tanto, bidimensional) $\overleftrightarrow{\sigma}$ cuyos elementos en un sistema cartesiano xy se representan por la matriz

$$\overleftrightarrow{\sigma} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La densidad de corriente se relaciona con el campo eléctrico $\vec{E}$ mediante la ley de Ohm

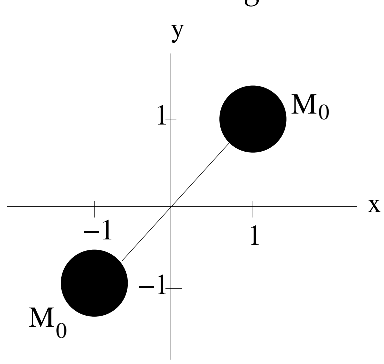
$$\vec{J} = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{E}$$

a) Si el campo eléctrico es $\vec{E} = E_0\hat{e}_x + E_0\hat{e}_y$, exprese la densidad de corriente.

b) Realice la transformación a un sistema cartesiano $x'y'$ donde vector base $\hat{e}_x'$ sea paralelo a $\vec{E}$ dado en el inciso (a). Encuentre la matriz de la transformación y la matriz que representa a $\overleftrightarrow{\sigma}$ en el nuevo sistema.

c) Con $\overleftrightarrow{\sigma}$ y $\vec{E}$ en el nuevo sistema, realice el producto $\vec{J} = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{E}$ y demuestre que se obtiene el mismo vector que en el inciso (a).

16. Considere un dumbell ubicado en el plano xy de un sistema de coordenadas cartesiano, como muestra la figura.



El tensor momento de inercia de este objeto esta dado por

$$\overleftrightarrow{I} = I_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j$$

$$\overleftrightarrow{I} \rightarrow M_0 \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Encuentre los vectores base de un sistema de coordenadas donde el tensor momento de inercia es diagonal. Dibuje el dumbell en ese sistema.