

Guía 3: Coordenadas curvilíneas

Viernes 5 de abril 2013

Bibl.: Apuntes de MFM1, J. Rogan y V. Muñoz, Cap. 3 y 4.

Problemas ayudantía: 1,2, 3, 4, 5, 11,13.

1. Cierta vector se expresa en un sistema cartesiano en la forma $\vec{V} = \hat{e}_x + \hat{e}_y + \hat{e}_z$.
 - a) Si este vector existe en el punto cartesiano $(1, 2, 1)$, encuentre las componentes en coordenadas cilíndricas.
 - b) Si este vector existe en el punto cartesiano $(1, 2, 1)$, encuentre las componentes en coordenadas esféricas.
 - c) Si este vector existe en el punto cartesiano $(0, 0, 1)$, encuentre las componentes en coordenadas cilíndricas.
 - d) Si este vector existe en el punto cartesiano $(0, 0, 1)$, encuentre las componentes en coordenadas esféricas.
2. Un disco rota, centrado en el origen de coordenadas de un sistema cartesiano xy , con velocidad angular constante.
 - a) ¿Cuál es la velocidad del punto $(1,1)$ expresada en un sistema cartesiano?
 - b) ¿Cuál es la velocidad del punto $(1,1)$ expresada en coordenadas polares?
3. El sistema de coordenadas elípticas (u, v, z) se relaciona con el sistema cartesiano a través de las ecuaciones

$$x = a \cosh u \cos v$$

$$y = a \sinh u \sin v$$

$$z = z$$

- a) Dibuje las líneas de u constante y v constante en una malla bidimensional xy , con z constante.
 - b) Obtenga los factores de escala h_i .
 - c) Obtenga los diferenciales de posición $(d\vec{r})$, de área y de volumen, usados para formar las integrales de línea, área y volumen.
 - d) Obtenga las expresiones para el gradiente, divergencia y rotor.
 - e) Expresar el vector posición en el sistema elíptico.
4. Calcule la integral de superficie

$$\iint_S d\vec{\sigma} \cdot \vec{F},$$

donde $\vec{F} = 2 \sin \theta \sin \phi \hat{e}_r + 3 \cos \theta \cos \phi \hat{e}_\phi + 4 \cos \theta \cos \phi \hat{e}_\theta$ y S es el octante $x > 0, y > 0, z > 0$ de una esfera de radio 2, centrada en el origen del sistema de coordenadas.

5. Considere una esfera de radio r_0 , rotando con velocidad angular constante ω_0 alrededor del eje Z , de manera que $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{e}_z$.

- a) Encuentre una expresión para el vector velocidad \vec{v} de un punto de la superficie de la esfera, usando coordenadas esféricas y vectores bases esféricos. Recuerde que $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.
- b) Obtenga la integral de línea

$$\oint d\vec{r} \cdot \vec{v}$$

alrededor del ecuador de la esfera.

Transformaciones en Sistema curvilíneos

6. Obtener los factores de escala h_i a partir de los diferenciales de línea correspondientes a las coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas respectivamente.

7. Las relaciones entre coordenadas cilíndricas y cartesianas están dadas por $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $z = z$. Obtener los factores de escala h_i correspondientes a las coordenadas cilíndricas de acuerdo a los siguientes pasos.

- a) Escriba el vector posición en base a \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} y en función de ρ , ϕ , z .
- b) A partir del vector posición, obtenga tres vectores que estén en las direcciones de $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ y \hat{z} respectivamente. Notar que esto provocará que los vectores obtenidos sean linealmente independientes.
- c) Normalice los vectores obtenidos. Las constantes de normalización corresponden a los factores de escala.

8. Las relaciones entre coordenadas esféricas y cartesianas están dadas por $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$. A partir de ello, repetir ejercicio 7.

9. Volviendo a considerar las igualdades que relacionan un sistema de coordenadas cilíndricas con un sistema de coordenadas cartesianas, realizar los siguientes pasos:

- a) Utilizando las relaciones dadas y los factores de escala obtenidos de los ejercicios 6 y 7, calcular los coeficientes a_{ij} de la matriz de transformación que va desde las coordenadas cilíndricas a las cartesianas.
- b) Obtener los coeficientes de la matriz de transformación inversa. ¿Qué representa esta matriz?

10. Considerando las igualdades que relacionan un sistema de coordenadas esféricas con un sistema de coordenadas cartesianas, repetir el ejercicio 9 para este caso.

11. Encuentra la matriz de la transformación que va desde las coordenadas cilíndricas a las esféricas.

12. Las coordenadas de un sistema hiperbólico se relacionan con las coordenadas cartesianas mediante las ecuaciones

$$u = x^2 - y^2$$

$$v = 2xy$$

$$z = z$$

Determine los elementos de la matriz que transforma las componentes cartesianas de un vector en componentes hiperbólicas. Usando esta matriz y el vector posición expresado en el sistema cartesiano, exprese el vector posición en el sistema hiperbólico.

13. Para el sistema de coordenadas elípticas descrito en el problema 3, determine la matriz de transformación $[a]$ que convierte las componentes de un vector del sistema cartesiano al sistema elíptico. ¿Que significa la matriz inversa $[a]^{-1}$

Ejercicios adicionales: *Mathematical Physics* de B. Kusse y E. Westwig, capítulos 3 y 4.