Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática I
Profesor: Eduardo Menéndez
Ayudante: Dany López

Guía 5: Series numéricas Martes 23 de abril de 2011
Bibl. Apuntes de MFM1, Cap 8, Arfken y Weber, Cap. 5.

Problemas ayudantía: 1a, 2, 3b, 4, 5a, 6, 7a,d(hint), 9a, 13 .

---

1. Investigue la convergencia de las series siguientes

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}.$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}\ .$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\ln^n(n+1)}\ .$

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\ .$

   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}\ .$

   f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}\ .$

   g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^2}\ .$

   h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$

2. En el ejercicio 1*g* estime el error cometivo al evaluar la serie mediante su suma parcial S_5. Hint, use el criterio de la integral.

3. En la series siguientes, estime el error cometido al evaluar la serie por su $n-$ésima suma parcial.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$

   b) $\displaystyle 1+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3+....$

4. Encuentre una expresión para acelerar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Hint: Utilice la identidad
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_1^{\infty} f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[f(n) - \int_n^{n+1} f(x)dx\right].$$
   Estime el error cometido al evaluar la serie por su suma parcial S_4 usando la serie original y usando la serie acelerada.
   Nota: Como referencia, el valor de la serie es $\pi^2/6$, pero no utilice este dato.

5. Deduzca si las siguientes series divergen o convergen absolutamente o condicionalmente.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}.$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}.$

   c) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\dots\ .$

   d) $\displaystyle 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^3}+....$

6. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ converge puntualmente, pero no uniformemente en el intervalo $[0,1]$, mientras que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ sí converge uniformemente en el mismo intervalo.

7. Obtenga un desarrollo en serie de potencias de x para cada uno de las siguientes funciones. Indique el radio de convergencia

   a) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt.$

   b) $\displaystyle\int_0^x \cos t^2 dt.$

   c) $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt.$

   d) $\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$

8. Obtenga una serie de potencias para $\dfrac{d}{dx}\dfrac{e^x-1}{x}$ y demuestre que $1=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$

9. Obtenga la suma de las siguientes series e indique el radio de convergencia en cada caso

   a) $x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\ldots\,.$

   b) $x-3x^3+5x^5+\ldots.$

10. Integrando por partes, desarrolle expansiones asintóticas de las integrales de Fresnel (aparecen en análisis de patrones de difracción)

    a) $C(x)=\displaystyle\int_0^x \cos\frac{\pi u^2}{2}du.$

    b) $s(x)=\displaystyle\int_0^x \sin\frac{\pi u^2}{2}du$

11. El patrón de difracción por un borde afilado (*knife-edge diffraction*) es descrito por

$$I=0{,}5I_0\left\{[C(u_0)+0{,}5]^2+[S(u_0)+0{,}5]^2\right\},$$

    donde $C(u_0)$ y $S(u_0)$ son integrales de Fresnel (ver problema 10). I_0 es la intensidad de la luz incidente, I es la intensidad difractada; u_0 es proporcional a la distancia desde el borde afilado (medida en ángulo recto al haz incidente). Calcule I/I_0 para u_0 variando entre $-1{,}0$ y $+4{,}0$, en pasos de 0.1. Tabule y plotee sus resultados.
    Valor para verificación. $u_0=1{,}0$, $I/I_0=1{,}259226$

12. Obtenga la expansión asintótica de la función error de Gauss

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt\simeq 1-\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x}\left(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1\cdot 2}{2^2x^4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3x^6}+\ldots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^nx^{2n}}\right)$$

    Hint: $\mathrm{erf}(x)=1-\mathrm{erfc}(x)=1-\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_x^{\infty}e^{-t^2}dt$.

13. Para $x>1$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{x^{n+1}}$$

    Determine si la serie anterior es una serie asintótica o no.