Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática I
Profesor: Eduardo Menéndez
Ayudante: Dany López

Guía 6

25 de Abril de 2013

Propiedades Algebraicas de los números complejos

1. Realice la suma, resta, multiplicación y división entre los siguientes números complejos

   a) $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = -1 - i$
   b) $z_1 = 4 - i6$ y $z_2 = 2 - i$
   c) $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ y $z_2 = -\sqrt{4} + i\sqrt{4}$
   d) $z_1 = -5 - i2$ y $z_2 = 10 - i\sqrt{2}$

2. Considerar el número complejo $z = -\sqrt{3} - i$.

   a) Determinar z_1 tal que $z^2 z_1 = 1$.
   b) Repetir el procedimiento para $z = -\sqrt{3} + i$.

Interpretación Geométrica

3. Determinar los puntos del plano-z que satisfacen la condición

   a) Re $z =$ Im z
   b) Re $iz =$ Re z

4. Determinar cual de los siguientes números complejos está más próximo al origen.

   a) $2 + i$
   b) $\sqrt{2} - i2$
   c) $\sqrt{3} + i\sqrt{2}$
   d) $1 + i\sqrt{2}$

5. Describir geométricamente las condiciones que deben cumplir z_1 y z_2 para satisfacer las siguientes relaciones.

   a) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$
   b) $|z_1 + z_2| = |z_1| - |z_2|$
   c) $|3z + 2| < 1$
   d) $|3z + 2i| = 1$

6. Demostrar la desigualdad de Schwarz

$$|z_1 z_2| \leq |z_1||z_2|$$

7. Utilizando la desigualdad de Schwarz, demostrar la desigualdad triangular

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Forma Polar y Exponencial

8. Escribir los siguientes números complejos en forma polar

   a) $-1 + i$
   b) $1 + i\sqrt{2}$
   c) $\sqrt{3} + i$
   d) $-1 - i\sqrt{3}$
   e) $6 - 8i$
   f) $\sqrt{6} + \sqrt{2} + i\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$

9. Escribir los números complejos dados en el ejercicio 8 en forma exponencial.

10. Multiplicar y dividir los siguientes pares de números complejos, utilizando la forma cartesiana, polar y exponencial.

    a) $z_1 = 3 + i3$ y $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$
    b) $z_1 = -1 - i$ y $z_2 = 4 + i4$
    c) $z_1 = 3 + i\sqrt{3}$ y $z_2 = 2 + i2$

11. Demostrar las siguientes relaciones

    a) $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$
    b) $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Potencias y Raices

12. Elevar a las siguientes potencias los números complejos dados en el ejercicio 8, utilizando la forma polar y exponencial. Compare los resultados. Indicación: para la forma polar, utilice el teorema de de Moivre.

    a) $n = 3$
    b) $n = -1$
    c) $n = 1/2$
    d) $n = 1/5$

13. Calcular las raices de los siguientes números complejos . Representar las raices gráficamente.

    a) $\sqrt[3]{1}$
    b) $\sqrt[3]{-i}$
    c) $\sqrt[8]{-16}$
    d) $\sqrt{1-i}$
    e) $\sqrt[3]{-2+2i}$