Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática I
Profesor: Eduardo Menéndez
Ayudante: Dany López

Guía 7

Viernes 3 de mayo de 2013

Problemas ayudantía: 2, 3, 5, 7a, 8(a-c), 10a, 17, 18, 20, 21.
Tarea: 6, 7(b-f), 10b, 11, 13, 15, 22 .

Funciones de variable compleja

1. Sea $w = f(z) = z^2$. Encontrar los valores de w que corresponden a $z_2 = -2 + i$ y $z_1 = 1 - 3i$. ¿Cómo se representa gráficamente esta correspondencia?

2. Un punto P se mueve en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj, alrededor de un círculo en el plano z con centro en el origen y de radio 1. Considere la aplicación $f(z) = z^3$. Muestre que cuando el punto P da una vuelta completa, la imagen P' de P en el plano w da 3 vueltas completas, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, describiendo un círculo de radio 1 y centro en el origen.

3. Sean c_1 y c_2 constantes reales. Considere la aplicación $w = z^2$. Determine el conjunto de todos los puntos en el plano z que se aplican en las siguientes recta del plano w

   a) $u = c_1$
   b) $v = c_2$

4. Sea la función $f(z) = z^3$. Además, considere $z = x + iy$. Exprese la función en la forma $w = u(x, y) + iv(x, y)$.

5. Sea $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ y $v(x, y) = 2xy - y$. Exprese $w = u(x, y) + iv(x, y)$ como función de z.

6. Demostrar las siguientes relaciones

   a) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$
   b) $|e^z| = e^x$

7. Demostrar, sin utilizar identidades trigonométricas, las siguientes relaciones

   a) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
   b) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$
   c) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$
   d) $\sin(-z) = -\sin z$
   e) $\cos(-z) = \cos z$
   f) $\tan(-z) = -\tan z$

8. Demostrar las siguientes relaciones

   a) $1 - \tanh^2 z = \text{sech}^2 z$
   b) $\sin iz = i \sinh z$
   c) $\cos iz = \cosh z$

d) $\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

9. *a*) Calcule $\exp \frac{2+n\pi i}{4}$, para n par e impar. Considere los casos n positivo y negativo.

   b) Si $f(z) = e^z$, demuestre que para n entero $f(z+in\pi) = (-)^n f(z)$

10. Determine las soluciones de

    a) $e^z = 1 \mp \sqrt{3}i$

    b) $e^{iz} = 1 \pm \sqrt{3}i$

11. ¿Qué condición(es) impone sobre sobre z y/o Re(z) y/o Im(z) el hecho que

    a) e^z sea real puro o imaginario puro.

    b) Repita para e^{iz}

12. Demuestre que

    a) $\sinh^2 z_1 - \sinh^2 z_2 = \cosh^2 z_1 - \cosh^2 z_2$

    b) $\sinh^2 z_1 + \cosh^2 z_2 = \cosh^2 z_1 + \sinh^2 z_2$

13. Verificar que las funciones

    a) $-i \sinh iz$, $\cosh iz$

    b) $-i \tanh iz$, $i\mathrm{csch}\, iz$

    c) $\mathrm{sech}\, iz$, $i \coth iz$,

    son las correspondientes funciones no hiperbólicas de argumento z. **Nota**: Ver Abramowitz & Stegun **4.3.49-54**.

14. Demuestre que (Referencia a Abramowitz & Stegun)

    a) $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$, **(4.5.54)**

    b) $|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$, **(4.5.56)**

    c) $\tanh z = \frac{\sinh 2x + i \sin 2y}{\cosh 2x + \cos 2y}$, **(4.5.51)**

    d) $\coth z = \frac{\sinh 2x - i \sin 2y}{\cosh 2x - \cos 2y}$, **(4.5.52)**

    e) $\tan z = \frac{\sin 2x + i \sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$, **(4.3.57)**

    f) $\cot z = \frac{\sin 2x - i \sinh 2y}{\cosh 2y - \cos 2x}$, **(4.3.58)**

    g) $\arg \sin z = \arctan(\cot x \tanh y)$, **(4.3.60)**

    h) $\arg \cos z = -\arctan(\tan x \tanh y)$, **(4.3.62)**

15. Escriba $z = \cos(\frac{\pi}{3} + i\theta)$ en la forma $x+iy$. ¿Cuál es la forma polar de z?

16. Verifique que
$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sinh\theta + i\cosh\theta) = \sinh(\theta + i\frac{\pi}{4}). \qquad (1)$$

17. Verifique que $i^i = e^{i \ln i} = e^{-\frac{\pi}{2}} e^{2n\pi}$ (¡ !). Calcule $(2i)^{2i}$.

18. Calcule $Re\left[\log\left(re^{i\theta} - 1\right)\right]$

19. Verificar que si $z \neq 0$ y α es un real, entonces

$$|z^{\alpha}| = e^{\alpha \ln |z|} = |z|^{\alpha} \tag{2}$$

20. Considere la función $f(z) = z^2 = u + iv$

    a) Encuentre la ecuación que describe la curva para la que $u = 1$ en el plano-xy. Repita para $v = 2$. Grafique las curvas.

    b) Encuentre los puntos de intersección en el primer cuadrante. Calcule la inclinación de cada curva en el punto de intersección. Constate la ortogonalidad.

21. Escriba en términos de de z y z^* las funciones

    - $f(z) = x^2 + y^2$.
    - $f(z) = x^2 - y^2 - 2y + 2(x - xy)i$
      R. $(z^*)^2 + 2iz$
    - $f(z) = x^3 - y^3$.

22. Considere x e y como funciones de z y z^*; es decir:

$$x = \frac{z + z^*}{2} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{z - z^*}{2i}, \tag{3}$$

Haga uso de la reglas formales de derivación para demostrar que:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z^*}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i\left[\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z^*}\right] \tag{4}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} \tag{5}$$

Nota: $\partial/\partial z$ representa la derivada parcial con respecto de z manteniendo z^* fijo. No debe confundirse con d/dz que es la derivada usual con respecto a la variable compleja z.

Problemas adicionales: capítulo 3 del libro de Churchill y Brown, Variable compleja y aplicaciones.