Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática I
Profesor: Eduardo Menéndez
Ayudante: Dany López

Guía 8

Viernes 10 y 17 de mayo de 2013

Problemas ayudantía: 1,2, 7,10a,13a, 15b, 17c, 19, 22, 24 .
Tarea: 3, 4, 5, 6, 11, 12, 15(a,b), 16, 17(a,b,d), 21, 23, 25, 29.

Derivada de funciones de variable compleja. Logaritmos y potencias.

1. Calcular, mediante definición, la derivada de $f(z) = z^3 - 2z$ en el punto $z = z_0$ y $z = -1$.

2. Mostrar que la función $f(z) = 1/(1-z)$ es holomorfa en todas partes excepto en $z = 1$.

3. Sea $w = f(z) = \frac{1+z}{1-z}$.

   a) Calcular $\frac{dw}{dz}$
   b) Determinar el dominio donde $f(z)$ no es analítica.

4. Sea $f(z) = x^2 + y^2$. Demostrar que $f(z)$ es diferenciable en $z = 0$, pero no es holomorfa.

5. Encuentre la condición que deben satisfacer a, b y c (constantes reales) para que la siguiente función sea analítica y/o diferenciable.

$$f(z) = x + ay + i(bx + cy)$$

6. Calcular los valores de a y b (constantes reales) para que la siguiente función sea analítica y/o diferenciable.

$$f(z) = x^2 + ay^2 + ibxy$$

7. Demostrar que $u(x, y) = e^{kx} \cos ky$ es armónica. Además, encontrar una armónica conjugada $v(x, y)$ tal que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea analítica.

8. Demostrar que $u(x, y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ es armónica. Además, encontrar una armónica conjugada $v(x, y)$ tal que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea analítica.

9. Demostrar que en la forma polar las ecuaciones de Cauchy-Riemann se escriben

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned}$$

10. **Demuestre que las funciones trigonométricas inversas cumplen**

   a) $\arcsin(z) = -i \log[iz + (1 - z^2)^{1/2}]$.
   b) $\arccos(z) = \frac{\pi}{2} + i \log[iz + (1 - z^2)^{1/2}] = -i \log[z + (z^2 - 1)^{1/2}]$.
   c) $\arctan(z) = \frac{i}{2} \log \frac{i + z}{i - z}$.

Indicación: Para hallar $\arcsin(z)$ resuelva w de la ecuación

$$z = \sin(w) = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}.$$

y utilice el mismo método para las otras funciones.

11. **Usando las expresiones del ejercicio anterior, demuestre que**

    a) $\{\arctan z\}' = \frac{1}{1+z^2}$

    b) $\{\arcsin z\}' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

12. Encuentre $f'(1+i)$ para $f(z)$ dada por e^{e^z}.

13. **Determine las soluciones de**

    a) $e^z = 1 \mp \sqrt{3}i$

    b) $e^{iz} = 1 \pm \sqrt{3}i$

14. Calcule las funciones hiperbólicas para $z_1 \pm z_2$. En particular, determine las fórmulas para el ángulo doble y la mitad del ángulo.

15. **Resuelva**

    a) $\tan z = i, \qquad \tan z = \frac{3i}{5},$

    b) $\cos z = 4, \qquad \sin z + \cos z = i\sqrt{2}$

16. Escriba $z = \cos(\frac{\pi}{3} + i\theta)$ en la forma $x + iy$. ¿Cuál es la forma polar de z?

17. **Determine la solución de**

    a) $\text{Log } z = 1 + i$

    b) $(\text{Log } z)^2 + \text{Log } z = -1$

    c) $\text{Log } z = (\text{Log } z^*)^*$.

    d) $e^z = e^{iz}$

    e) $(e^z - 1)^2 = e^{2z}$

18. Considere la identidad

$$\log z_1 + \log z_2 = \log(z_1 z_2). \tag{1}$$

    Si $z_1 = -ie$ y $z_2 = -2$, determine los valores específicos de $\log z_1$, $\log z_2$ y $\log(z_1 z_2)$ que satisfacen la identidad de Ec (1).

19. **Paradoja**

    Considere el error en el siguiente razonamiento:

$$1^2 = (-1)^2 \Rightarrow \log(1)^2 = \log(-1)^2 \tag{2}$$

    Se sigue entonces que $2\log 1 = 2\log(-1)$ y, en definitiva $\log 1 = \log(-1)$. Por otra parte, debido a que un posible valor de $\log 1$ es cero, concluimos que $\log(-1) = 0$.

20. **Importancia de la función logaritmo**

    Constate con diferentes ejemplos que si $z \neq 0$ entonces, $z^c = e^{c \log z}$ tiene un conjunto infinito de valores excepto si c es un número racional.

    Tenga presente que si c no es un entero $f(z) = z^c$ es multivaluada, entonces $f(z)$ posee varias ramas. La rama principal, por ejemplo, se obtiene considerando la rama principal de $\log z$. Por lo tanto esa rama de $f(z)$ es analítica en el mismo dominio que lo es $\operatorname{Log} z$.

21. Calcule todos los valores de

    a) $(1-i)^{1+i}, \quad (1+i)^{1-i}, \quad 1^i, \quad 2^{\sqrt{2}}, \quad i^{e^i}$

    b) $(1+i\tan 2)^i, \quad \pi^e, \quad (1+i)^{e+i\pi}, \quad \left(e^{\pi^2}\right)^i$

22. **Una rama de $f(z) = \sqrt{z}$ está definida por medio del corte** $x = 0, y \leq 0$. Si en esa rama $f(z)$ toma el valor -2 en $z = 4$, determine el valor de $f(z)$ y $f'(z)$ en los puntos:

    a) $16 \qquad -16 \qquad 16i \qquad -16i$

    b) $1+i \qquad 1-i \qquad 4-4\sqrt{3}i.$

23. Una rama de $f(z) = (z-1)^{2/3}$ está definida por medio del corte $x = 1, y \leq 0$. En esta rama $f(z)$ toma el valor 1 en $z = 0$. Determine el valor de $f(z)$ y $f'(z)$ en los puntos:

    $$1+8i, \qquad -1, \qquad -i, \qquad (1-i)/2$$

24. **Determine todas la soluciones en el plano complejo de la ecuación** $i^z + i^{-z} = 0$.

25. **Determine parte real y parte imaginaria de** $f(z) = Log(z-1)$. ¿En qué dominio $Ref(z)$ y/o $Imf(z)$ satisface(n) la Ec de Laplace? Fundamente su respuesta.

26. Verificar que si $z \neq 0$ y α es un real, entonces

    $$|z^\alpha| = e^{\alpha \ln |z|} = |z|^\alpha \tag{3}$$

27. Determine α real tal que $[e^y + e^{\alpha y}] \cos x$ sea armónica.

28. **Considere la función** $f(z) = z^2 = u + iv$

    a) Encuentre la ecuación que describe la curva para la que $u = 1$ en el plano-xy. Repita para $v = 2$. Grafique las curvas.

    b) Encuentre los puntos de intersección en el primer cuadrante. Calcule la inclinación de cada curva en el punto de intersección. Constate la ortogonalidad.

29. Dibujar parte de las curvas que se indican y verificar que se intersecta ortogonalmente.

    a) $r =$ constante, $\theta =$ constante para $w = 1/z$ y $w = 1/z^2$.

    b) $u =$ constante, $v =$ constante para $w = 1/z$. Repita para $w = \frac{z-1}{z+1}$.

Complementos

1. Estudie la analiticidad de $f(z) = \exp(z^*)$.

2. Demuestre de dos maneras que

    $$f(z) = e^{z^2} \tag{4}$$

    es analítica. Calcule $f'(z)$ de tres maneras.

3. Estudie la analiticidad de $f(z) = \exp(z^*)$.

4. Demuestre de dos maneras que
$$f(z) = e^{z^2} \tag{5}$$
es analítica. Calcule $f'(z)$ de tres maneras.

5. Demuestre que

   a) $\sinh^2 z_1 - \sinh^2 z_2 = \cosh^2 z_1 - \cosh^2 z_2$

   b) $\sinh^2 z_1 + \cosh^2 z_2 = \cosh^2 z_1 + \sinh^2 z_2$

6. Considere $f(z) = u + iv$ y suponga que la segunda derivada $f''(z)$ existe y demuestre que
$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{6}$$
$$f''(z) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \tag{7}$$

7. Demuestre que si la derivada de $f(z) = u + iv$ existe, entonces
$$f'(z) = \left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right][\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta] \tag{8}$$
Escriba además la otra expresión para $f'(z)$.

8. Escriba las expresiones para la segunda derivada de f en coordenadas polares.

9. Suponga $f(z) = u + iv$ analítica en determinado dominio que no incluye el origen. utilice las ecuaciones de C-R para demostrar que si $h(r,\theta)$ es $u(r,\theta)$ o $v(r,\theta)$, entonces
$$r^2 h_{rr}(r,\theta) + r h_r(r,\theta) + h_{\theta\theta}(r,\theta) = 0 \tag{9}$$
que es la forma polar de la ecuación de Laplace; es decir, el laplaciano es
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{10}$$
$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{11}$$

10. Escriba en términos de de z y z^* las funciones

    - $f(z) = x^2 + y^2$.
    - $f(z) = x^2 - y^2 - 2y + 2(x - xy)i$
      R. $(z^*)^2 + 2iz$
    - $f(z) = x^3 - y^3$.

11. Considere la función $\psi(x,y)$ y $\nabla^2_{x,y}\psi$ su laplaciano. Sea $w = f(z)$ función analítica. Realice el cambio de variables de x, y a u, v y considere ψ como función de u y v. Demuestre que
$$\nabla^2_{x,y}\psi = \nabla^2_{u,v}\psi|f'(z)|^2 \tag{12}$$

12. Calcule $\{\mathrm{sen}\sqrt{z}\}'$ y $\{\exp z^2\}'$ derivando directamente y luego verifique que sus resultado es consistente con el que se obtiene derivando término a término las series infinitas correspondientes.