Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática I
Profesor: Eduardo Menéndez
Ayudante: Dany López

Guía 9

Viernes 24 de mayo de 2013

Problemas ayudantía: 1a, 2a, 5a,b, 9, 12, 19a, 26a,b .
Tarea: 1b,c, 2b, 5c, 6, 10, 15, 16, 19b, 26d,e, 27, 29

Integración de funciones de variable compleja

* Esta es una guía con problemas adicionales. El resto de problemas para ejercitarse son los correspondientes al Capítulo 4 del libro de Churchill y Brown.

1. Calcular (la integral de línea real) $\int_{(0,3)}^{(2,4)}(2y+x^2)dx+(3x-y)dy$ a lo largo de
   a) La parábola $x=2t$, $y=t^2+3$
   b) Las líneas rectas desde $(0,3)$ a $(2,3)$ y luego desde $(2,3)$ a $(2,4)$
   c) La línea recta desde $(0,3)$ a $(2,4)$

2. Calcular $\int_c \bar{z}dz$ desde $z=0$ a $z=4+2i$ a lo largo de la curva C dada por
   a) $z=t^2+it$
   b) La línea desde $z=0$ a $z=2i$ y luego la línea desde $z=2i$ a $z=4+2i$.

3. Calcular $\int_{(0,1)}^{(2,5)}(3x+y)dx+(2y-x)dy$ a lo largo de
   a) la curva $y=x^2+1$
   b) la línea recta que une $(0,1)$ $(2,5)$
   c) la línea recta desde $(0,1)$ a $(0,5)$ y luego desde $(0,5)$ a $(2,5)$

4. Calcular $\oint_c(x+2y)dx+(y-2x)dy$ alrededor de la elipse C definida por
   a) $x=4\cos\theta$, $y=3\sin\theta$, $0\leq\theta<2\pi$, si C está descrita en la dirección contraria a la del movimiento de las manecillas del reloj.
   b) ¿Qué sucede en 4*a* si C está descrita en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj?

5. Calcular $\int_c(x^2-iy^2)dz$ a lo largo de
   a) la parábola $y=2x^2$ desde $(1,2)$ a $(2,8)$
   b) las líneas rectas desde $(1,1)$ a $(1,8)$ y luego desde $(1,8)$ a $(2,8)$
   c) la línea recta desde $(1,1)$ a $(2,8)$

6. Calcular $\oint|z|^2dz$ alrededor del cuadrado con vértices en $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

7. Calcular $\int_c (z^2+3z)dz$ a lo largo de

   a) el círculo $|z|=2$ desde $(2,0)$ a $(0,2)$ en una dirección contraria a la del movimiento de las manecillas del reloj.
   b) la línea recta desde $(2,0)$ a $(0,2)$.
   c) las líneas rectas desde $(2,0)$ a $(2,2)$ y luego desde $(2,2)$ a $(0,2)$.

8. Calcular $\oint_c \bar{z}^2 dz$ alrededor de los círculos

   a) $|z|=1$
   b) $|z-1|=1$

9. Demostrar que $\int F(z)G'(z)dz = F(z)G(z) - \int F'(z)G(z)dz$.

10. Utilizando el resultado de 9, calcular

    a) $\int_0^1 ze^{2z}dz$
    b) $\int_0^{2\pi} z^2 \sin 4z dz$

11. Demostrar que

$$\int \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{z}{a} + c_1 = \frac{1}{2ai}\ln\left(\frac{z-ai}{z+ai}\right) + c_2$$

    Note que es una integral indefinida.

    Teorema de Cauchy-Goursat

12. Calcular $\oint_C \frac{dz}{z-a}$ donde C es una curva simple cerrada y $z=a$ está

    a) fuera de C.
    b) dentro de C.

13. Calcular $\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}, n = 2,3,4...$ donde $z=a$ está dentro de la curva simple cerrada C.

14. Si C es la curva $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ que une los puntos $(1,1)$ y $(2,3)$, hallar el valor de

$$\int_c (12z^2 - 4iz)dz$$

15. Calcular $\int_c (z+2)e^{iz}dz$ a lo largo de la parábola C definida por $\pi^2 y = x^2$ desde $(0,0)$ a $(\pi,1)$.

Fórmula Integral de Cauchy

16. Calcular $\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{e^z}{z-2}dz$ si C es
    a) el círculo $|z| = 3$
    b) el círculo $|z| = 1$
17. Calcular $\oint_c \frac{\sin 3z}{z+\pi/2}dz$ si C es el círculo $|z| = 5$.
18. Calcular $\oint_c \frac{e^{3z}}{z-\pi i}dz$ si C es
    a) el círculo $|z - 1| = 4$
    b) la elipse $|z - 2| + |z + 2| = 6$
19. Calcular $\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{\cos \pi z}{z^2-1}dz$ si C es un rectángulo de vértices
    a) $2 \pm i$, $-2 \pm i$
    b) $-i$, $2 - i$, $2 + i$, i
20. Probar

$$\oint_c \frac{dz}{z^2 + z} = 0$$

donde C es el círculo de radio 2.

21. Probar que

$$f'''(a) = \frac{3!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-a)^4}dz$$

si C es una curva simple cerrada alrededor de $|z| = a$ y $f(z)$ es analítica en el interior y sobre C.

22. Calcular, considerando que C es el círculo $|z| = 3$

$$\oint_c \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz$$

23. Calcular, considerando que C es el círculo $|z| = 3$

$$\oint_c \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$$

24. Calcular la integral

$$\oint_c \frac{e^z}{z^2 + \pi^2}dz$$

    a) si C es la circunferencia cerrada $|z| = 2$
    b) si C es la circunferencia cerrada $|z| = 3,15$

Los siguientes ejercicios los presentamos gracias a la gentileza del Profesor Carlos Esparza de la Usach. Los que no han sido inventados por él, están tomados de los libros *Complex Variables with applications*, A David Wunsch, Pearson 2005, y *Teoría de las Funciones Analíticas*, A. Markushevich, Editorial Mir.

25. **Teorema del valor medio de Gauß**

    Revise las condiciones requeridas por el teorema del valor medio de Gauß

    $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \tag{1}$$

    Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, verifique que

    $$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\,\mathrm{sen}\,\theta) d\theta \tag{2}$$

    $$v(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\,\mathrm{sen}\,\theta) d\theta \tag{3}$$

26. **Aplicaciones del teorema de Gauß**

    [Wunsch 4.6.1,2,$\cdots$] Considere $z = e^{i\theta}$ y haga uso del teorema de Gauß para evaluar

    a) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta$

    b) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) d\theta$ $\qquad f(z) = \cos z$.

    c) $\int_0^{2\pi} \cos(\cos\theta)\cosh(\mathrm{sen}\,\theta) d\theta$, $\qquad f(z) = \cos z$.

    d) $\int_0^{2\pi} \frac{a + \cos(n\theta)}{1 + a^2 + 2a\cos(n\theta)} d\theta$, $\qquad f(z) = \frac{1}{a + z^n}$.

    e) Demuestre que para $a > 1$ y n entero

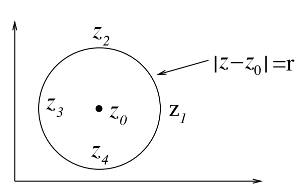
    $$\int_0^{2\pi} Log(1 + a^2 + 2a\cos(n\theta)) d\theta = 4\pi,$$

    f) Demuestre que si $a > b \geq 0$

    $$\int_0^{2\pi} Log(a + b\cos\theta) d\theta = 2\pi ln \left[\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2} \right]$$

27. **Valor medio con números**

    [Wunsch 4.6.7] Sea $u(x, y)$ una función armónica y sea u_0 el valor de ella en el centro de la circunferencia de radio r. Suponga que u toma los valores u_1, u_2, u_3 y u_4 en cuatro puntos igualmente espaciados sobre la circunferencia, como se indica en la figura.



Use la Ec (2) para demostrar que

$$u_0 = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4} \tag{4}$$

Ahora considere $u(x, y) = e^x \cos y$ y los cuatro puntos $1, 1 + i$, $0, 9 + i$, $1 + 0, 9i$ y $1 + 1, 1i$. Evalue $u(1, 1)$ y compare ese valor con la aproximación de Ec (4).

28. **Una fórmula de Wallis**

    [Wunsch 4.6.17] La fórmulas de Wallis permiten hacer integrales del tipo $\int_0^{\pi/2} [f(\theta)]^n \, d\theta$, en que n es un entero > 0, par o impar y $f(\theta) = \operatorname{sen}\theta$ o $\cos\theta$.

    a) Use el teorema del binomio para demostrar que para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ se tiene

    $$\frac{1}{z}\left[z + \frac{1}{z}\right]^{2n} = \Sigma_{k=0}^{k=2n} \frac{(2n)! z^{2n-2k-1}}{(2n-k)!k!}. \tag{5}$$

    b) Integre término a término y demuestre que

    $$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\left[z + \frac{1}{z}\right]^{2n} dz = 2\pi i \frac{(2n)!}{(n!)^2} \tag{6}$$

    c) Con $z = e^{i\theta}$ del resultado anterior se tiene

    $$\int_0^{2\pi} (2\cos\theta)^{2n} d\theta = 2\pi \frac{(2n)!}{(n!)^2} \tag{7}$$

    d) Haciendo uso de la simetría de $\cos\theta$ en el dominio $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y del hecho que $2n$ es par, explique el hecho que

    $$\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2n} d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}, \tag{8}$$

    que es la fórmula del coseno de Wallis.
    Finalmente, calcule otra de las integrales de Wallis

    $$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}\theta)^{2n} d\theta \tag{9}$$

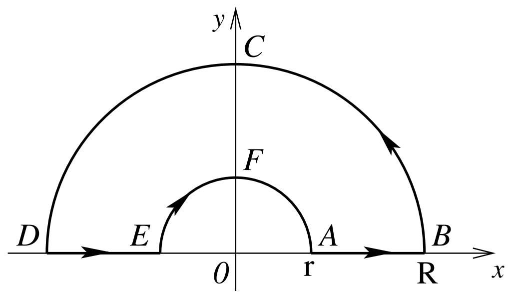
    Nota: ver, por ejemplo
http://mathworld.wolfram.com/WallisCosineFormula.html

29. **Evitando la singularidad**: Un ejercicio guiado.

    [Markushevich V. I pág 272] Demuestre que

    $$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \tag{10}$$

    Ind: Considere la integral de $f(z) = \exp(iz)/z$ en el contorno Γ con forma semianular de radios r y R, que excluye el origen, que se indica en la figura; Γ rectificable y $f(z)$ es entera. Para realizar la demostración realice el paso al límite $r \to 0$ y $R \to \infty$.



Contorno semianular Γ

Note que, en notación simbólica

$$\begin{aligned} \int_\Gamma &= \int_{AB} + \int_{BCD} + \int_{DE} + \int_{EFA} \qquad (11) \\ &= I_{AB} + I_{BCD} + I_{DE} + I_{EFA} = 0_c. \qquad (12) \end{aligned}$$

Las integrales en los segmentos son

$$I_{AB}(r,R) = \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx. \qquad (13)$$

Sobre el la semicircunferencia superior

$$\begin{aligned} I_{BCD}(R) &= \int_0^\pi \frac{\exp(iRe^{i\theta})}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \qquad (14) \\ &= i\int_0^\pi \exp(iR\cos\theta - R\sin\theta) d\theta. \qquad (15) \end{aligned}$$

Sobre el trazo recto DE

$$\begin{aligned} I_{DE}(r,R) &= \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx \qquad (16) \\ &= -\int_r^R \frac{e^{-ix}}{x} dx = -I^*_{AB}(r,R). \qquad (17) \end{aligned}$$

El paso de Ec (16) a Ec (17) se realizó haciendo el cambio $-x \to x$. Finalmente

$$\begin{aligned} I_{EFA}(r) &= \int_{-\pi}^0 \frac{\exp(ire^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \qquad (18) \\ &= -i\int_0^\pi \exp(ir\cos\theta - r\sin\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Acotaremos $|I_{BCD}(R)|$. Observemos que

$$\begin{aligned} |I_{BCD}(R)| &\leq \int_0^\pi |\exp(iR\cos\theta)||\exp(-R\sin\theta)| d\theta \\ &= \int_0^\pi \exp(-R\sin\theta) d\theta \qquad (19) \\ &< \int_0^\pi \exp(-2R\theta) d\theta \qquad (20) \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{1-e^{-2R}}{R} < \frac{\pi}{2R}. \qquad (21) \end{aligned}$$

Puesto que $\lim_{R\to\infty} |I_{BCD}(R)| = 0$; se sigue que $\lim_{R\to\infty} I_{BCD}(R) = 0$. Por otra parte, se verifica sin dificultad que

$$\lim_{r\to 0} I_{EFA}(r) = -i\int_0^\pi d\theta = -\pi i. \tag{22}$$

Teniendo en cuenta Ec (12) se tiene que

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \left[I_{AB}(r,R) + I_{DE}(r,R)\right] = \tag{23}$$

$$= -\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \left[I_{BCD}(R) + I_{EFA}(r)\right] = i\pi. \tag{24}$$

Entonces, haciendo uso de Ecs (13), (17) y (24) se tiene que las integrales impropias existen. En efecto

$$\frac{1}{2i}\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \left[I_{AB}(r,R) + I_{DE}(r,R)\right] = \tag{25}$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \int_r^R \frac{\sin x}{x}dx = I = \frac{\pi}{2} \tag{26}$$

Por lo tanto, es válida la Ec (10).

Extra: Para p número real, calcule o simplemente anote, fundamentando su procedimiento, el resultado de la integral

$$I_p = \int_0^\infty \frac{\sin px}{x}dx. \tag{27}$$

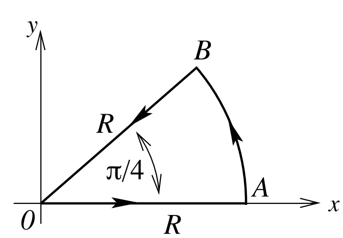
30. **Integrales de Fresnel** : Un ejercicio guiado.

[Markushevich V. I pág 272] Evalúe las integrales

$$I_c = \int_0^\infty \cos x^2 dx, \qquad I_s = \int_0^\infty \sin x^2 dx \tag{28}$$

que aparecen en teoría de la difracción. De acuerdo a la representación gráfica de cada integrando ¿qué espera de ambos resultados?

Ind: Considere la integral de $f(z) = \exp(iz^2)$ en el contorno Γ con forma de cuña de lado R que subtiende un ángulo de $\pi/4$, como se indica en la figura.



Contorno Γ para integrales de Fresnel

Note que, en notación simbólica

$$\int_\Gamma = \int_{0A} + \int_{AB} + \int_{B0} = I_{0A} + I_{AB} + I_{B0} = 0_c \tag{29}$$

Separando las integrales, tenemos que

$$I_{0A} = \int_0^R e^{iz^2} dx = \int_0^R e^{ix^2} dx \tag{30}$$

y,

$$I_{AB} = \int_0^{\pi/4} \exp(iR^2 e^{2i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta \tag{31}$$

finalmente para I_{B0} se tiene $z = re^{i\pi/4}$ con $dz = dr$ y r variando de $R \to 0$, entonces

$$I_{B0}(R) = \int_{B0} e^{iz^2} dz = -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-r^2} dr \tag{32}$$

El límite

$$\lim_{R\to\infty} I_{B0}(R) = -e^{i\pi/4} \int_0^\infty e^{-r^2} dr = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4} \tag{33}$$

Para $I_{AB}(R)$ se cumple

$$|I_{AB}(R)| \leq R \int_0^{\pi/4} \exp(-R^2 \sin 2\theta) d\theta. \tag{34}$$

Puesto que para $0 < \theta < \pi/2$ se cumple que $\sin\theta > 2\theta/\pi$, se sigue que

$$|I_{AB}(R)| \leq R \int_0^{\pi/4} \exp(-4R^2\theta/\pi) d\theta = \frac{\pi}{4} \frac{1 - e^{-R^2}}{R} \tag{35}$$

de manera que $\lim_{R\to\infty} I_{AB}(R) = 0$. Ahora, de Ec (29) tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} I_{0A}(R) &= -\lim_{R\to\infty} [I_{AB}(R) + I_{B0}(R)] \\ &= -\frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{i\pi/4} \end{aligned} \tag{36}$$

luego

$$\lim_{R\to\infty} \left[\int_0^R \cos x^2 dx + i \int_0^R \sin x^2 dx \right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\pi/4} \tag{37}$$

y, en definitiva

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \tag{38}$$

Extra: Grafique en un rango conveniente de x las funciones $\cos(x^2)$ y $\operatorname{sen}(x^2)$. Grafique también $f(\theta) = \sin\theta$ y $f_1(\theta) = 2\theta/\pi$ para $0 \leq \theta \leq \pi/2$

31. **Contorno rectangular**

Demuestre que para $b > 0$ y $a > 0$

$$I(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2} \cos(2abx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-ba^2} \tag{39}$$

Ind: Considere la integral de $f(z) = \exp(-bz^2)$ sobre el contorno rectangular de vértices $(-R, 0), (0, R), (R, a), (-R, a)$ y tome el límite cuando $R \to \infty$.

Obs1: Note que la integral $I(a, b)$ es independiente del signo de a, pero el signo positivo se indicó para definir el contorno.

Obs2: Verificar que la Ec (38) reproduce el resultado conocido para el caso $a = 0$.

Obs3: Pensar otra manera para realizar la integral de Ec (38) y proceder de acuerdo a ella.