Teoría de Ginzburg-Landau

Supone un parámetro de orden complejo $\psi(\vec{r})$ (una "pseudo-función de onda") tal que $n_s(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})|^2$ (cuadrado del parámetro de orden es la densidad de electrones superconductores)

La idea es expandir la energía libre (de Helmholtz, por ej.) en términos de ψ:

$$f = f_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*}\left|\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{e^*}{c}\vec{A}\right)\psi\right|^2 + \frac{B^2}{2\cancel{8\pi}\mu_0}$$

f: densidad de energía libre

Para $|\psi| = 0 \Rightarrow f = f_n + \frac{B^2}{2\cancel{8\pi}\mu_0} = f_n + \frac{H^2}{8\pi}$

Si no hay gradientes de ψ ni potencial vector $\vec{A}$, $f = f_n + \alpha|\psi^2| + \frac{\beta}{2}|\psi|^4$ cuyo mínimo está mal definido si $\beta < 0$, luego tomamos $\beta \geq 0$ y ahí hay dos casos:

Si $\alpha > 0$: mínimo f es en el caso $|\psi| = 0$ (estado normal)

$\alpha < 0$: mínimo f ocurre cuando $|\psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$ y $(f - f_n)_{min} = \frac{-\alpha^2}{\beta} + \frac{\cancel{\beta}}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{\beta^{\cancel{2}}}$

$$= -\frac{\alpha^2}{2\beta}$$

La transición entonces corresponde al paso de $\alpha > 0$ a $\alpha < 0$, i.e., $\alpha(T_c) = 0$. Expandiendo $\alpha(T)$ en potencias de $T - T_c$,

$$\alpha(T) \approx \cancelto{0}{\alpha(T_c)} + \alpha'(T_c)(T - T_c) = \alpha'(T_c)\left(\frac{T}{T_c} - 1\right)T_c$$

$$= \alpha'(t)(t-1) \quad ; \; t = T/T_c$$

$$\Rightarrow |\psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} \approx -\frac{\alpha'(t)}{\beta}(t-1) \quad (t < 1)$$

En el caso general, minimizando f (o más bien $F = \int_V d\vec{x}\, f(\vec{x})$) respecto al parámetro de orden se obtienen las ecs de Ginzburg-Landau,

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m^*}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{e^*}{c}\vec{A}\right)^2\psi = 0 \qquad (1)$$

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{e^*}{m^*}|\psi|^2\left(\hbar\vec{\nabla}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{fase}}}{\varphi} - \frac{e^*}{c}\vec{A}\right) \qquad (2)$$

con $\psi(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})|\, e^{i\varphi(\vec{r})}$

(2) es la ec. de la corriente en el caso cuántico para partículas de masa m^*, carga e^* y función de onda $\psi(\vec{r})$

(1) es la ec. de Schrödinger más un término no lineal $\beta|\psi|^2\psi$. Sin este término,

$$\underbrace{\frac{1}{2m^*}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{e^*}{c}\vec{A}\right)^2}_{\equiv \check{H} = \frac{\check{p}^2}{2m^*}}\psi = \underbrace{-\alpha}_{\equiv E}\psi$$

El término no lineal puede imaginarse como un potencial $\Phi[\psi] = \beta|\psi|^2$ dependiente de la misma función de onda, que tiende a favorecer funciones de onda lo más uniformes posibles.

Se definen $\lambda(T) = \sqrt{\dfrac{m^* c^2}{4\pi e^2 n_0^2}}$; $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{en el interior}}}{n_0 = |\psi_0|^2}$

$$\xi(T) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha(T)|}} \Rightarrow K \equiv \frac{\lambda(T)}{\xi(T)}$$

(Longitud de coherencia)

$\xi_0 \approx \dfrac{\hbar v_F}{k_B T_C} \cdot 0.18$

(L.C. de Pippard)

$\Rightarrow$ Tipo I: $K < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Tipo II: $K > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$K \gg 1$, GL $\rightarrow$ London

$n_s(\vec{r})$ cambia sólo en escala de ξ_0

BCS: Bardeen, Cooper, Schrieffer (1957)

1948: Modelo de London

- Superficie de Fermi es <u>inestable</u> a suficientemente baja T, se favorece la formación de pares de Cooper. Esto en presencia de una interacción atractiva (por pequeña que sea) entre los electrones. Superconductividad es entonces un análogo a la condensación de Bose-Einstein para los pares de Cooper.
- BCS proporciona una forma aprox. de la función de onda de muchos cuerpos para el conjunto de electrones ligeramente ligados.
- Existe un <u>gap</u> para las interacciones (excitaciones) del sistema compuesto por todos los pares de Cooper: no es posible agregar una cantidad arbitrariamente pequeña de energía a un electrón aislado, hay que agregar un mínimo ΔE que excite colectivamente a todos los pares. No pueden romperse los pares uno a uno. El gap mismo disminuye con T, y $\Delta E(T_c) = 0$.
  Cercano a T_c, $\Delta E(T) \approx 3.5\, k_B T_c \sqrt{1-(T/T_c)}$ en acuerdo con una transición de segundo orden.

Función de onda BCS $\rightarrow$ N fermiones (antisimétrica) $\rightarrow$ determinante de Slater

Ej: 2 electrones: $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{\chi_1(\vec{x}_1)\chi_2(\vec{x}_2) - \chi_1(\vec{x}_2)\chi_2(\vec{x}_1)\}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \chi_1(\vec{x}_1) & \chi_2(\vec{x}_1) \\ \chi_1(\vec{x}_2) & \chi_2(\vec{x}_2) \end{vmatrix}$$

Una forma más compacta es usando "segunda cuantización":

$$|\psi_0\rangle = \sum_{k>k_F} g_{\vec{k}}\, C^*_{\vec{k}\uparrow} C^*_{-\vec{k}\downarrow} |F\rangle \quad ; \; |F\rangle: \text{ nivel de Fermi lleno hasta } k_F$$

operador creación electrón $\uparrow$ con momentum $\vec{k}$

También hay un operador de destrucción $C_{\vec{k}\uparrow}$ y $C_{\vec{k}\downarrow}$

Se trabaja en una aproximación de campo medio: ocupación de un estado depende de la ocupación media de los otros estados $\Rightarrow$ N ahora es variable $\Rightarrow$ Gran canónico

$$|\Psi_G\rangle = \prod_{\vec{k}=\vec{k}_1,\dots\vec{k}_M} \left(u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} C^*_{\vec{k}\uparrow} C^*_{-\vec{k}\downarrow}\right)|\phi_0\rangle$$

M: número de estados $\vec{k}$ ocupados

estado "vacío", sin partículas

Los $u_{\vec{k}}$ y $v_{\vec{k}}$ se determinan variacionalmente: hacen mínimo $\langle\Psi_G|\mathcal{H}|\Psi_G\rangle$ para un cierto $\mathcal{H}$ de interacción

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k},\sigma=\uparrow,\downarrow} \epsilon_{\vec{k}}\, n_{k,\sigma} + \sum_{\vec{k},\vec{\ell}} V_{\vec{k},\vec{\ell}}\, C^*_{\vec{k}\uparrow} C^*_{-\vec{k}\downarrow} C_{-\vec{\ell},\downarrow} C_{\vec{\ell},\uparrow}$$

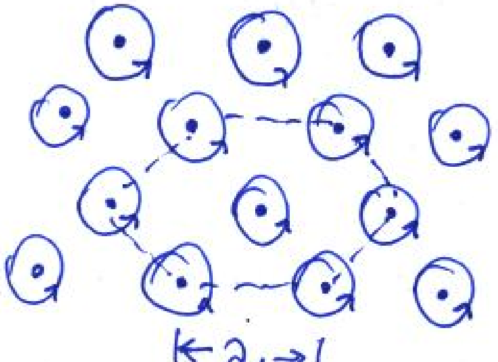
El espectro de $\mathcal{H}$ presenta un gap Δ_k dependiente de la interacción $V_{\vec{k},\vec{\ell}}$

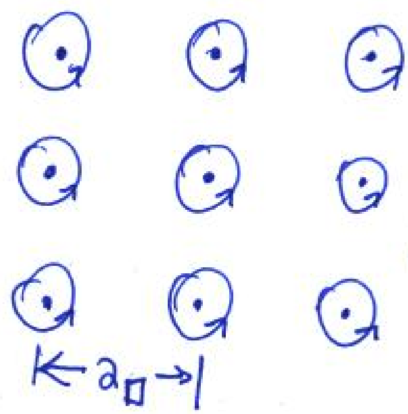
En un superconductor el flujo magnético $\Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}$ está cuantizado:

Φ_0: cuanto de flujo magnético $= \dfrac{hc}{2e}$

En el estado mixto (Tipo II) se producen vórtices de "supercorriente" cuando el campo $\vec{B}$ consigue penetrar: estos vórtices se distribuyen regularmente en una red:

$$a_\Delta = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} \cdot \left(\frac{\Phi_0}{B}\right)^{1/2}$$





$$a_\square = \left(\frac{\Phi_0}{B}\right)^{1/2}$$