Pauta

LICENCIATURA EN CIENCIAS EXACTAS
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Mecánica I

11 de Julio de 2009

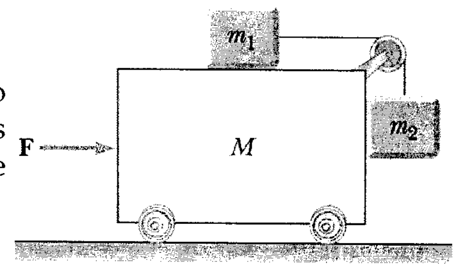
Examen Final (V.A)

Tema de desarrollo

Tome dos boleta al azar con el profesor y escoja una. Desarrolle el tema en un maximo de tres hojas.

Problema 1

¿Qué fuerza fuerza horizontal se debe aplicar al carro de la figura para que los bloques permanezcan fijos respecto al carro? Suponga que no hay fricción y que las ruedas tienen masa despreciable.



Problema 2

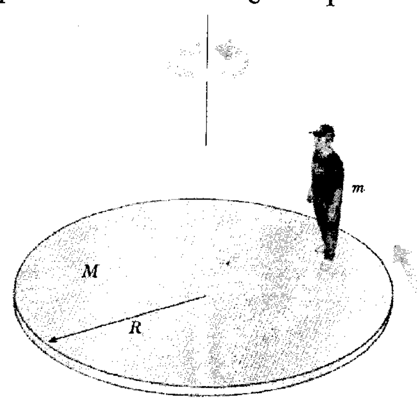
Una esfera homogénea rueda hacia abajo por un plano inclinado de angulo θ respecto a la horizontal.

a) Encuentre la aceleración y la velocidad del centro de masas en función de la distancia recorrida.

b) Si la esfera es un cascarón hueco, ¿desciende más rápido o más lento? ¿Por qué?

Problema 3

Una plataforma horizontal con forma de disco da vueltas libremente, con periodo T, en un plano horizontal en torno a un eje vertical sin fricción. La plataforma tiene una masa M y un radio R. Un estudiante, cuya masa es m, que inicialmente estaba sentado en el borde de la plataforma, camina lentamente desde el borde hasta el centro. ¿Cuál es la rapidez angular del sistema cuando el estudiante está a una distancia r del centro?

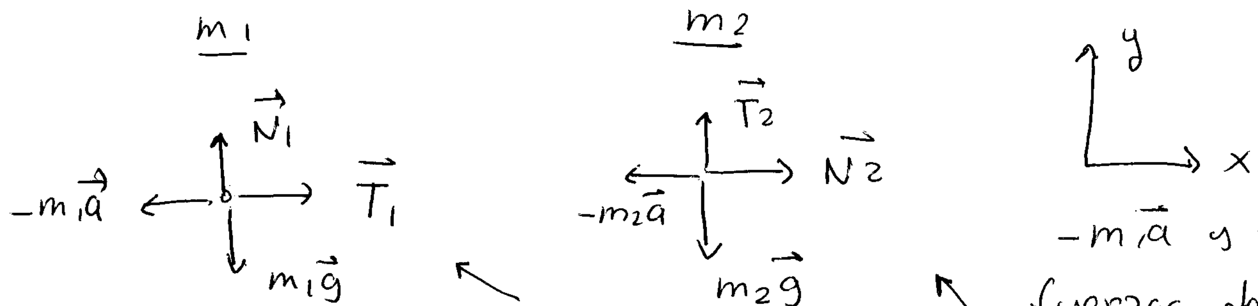


A.1. Solucion 1.

Si los 3 bloques se mueven juntos, tienen la misma aceleracion 1

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_1+m_2+M} \Rightarrow a(m_1+m_2+M) = F \quad (1)$$

Para determinar $\vec{a}$, estudiemos el equilibrio de m_1 y m_2 inmoviles en el sistema de referencia no inercial ligado al carro.



$-m_1\vec{a}$ y $-m_2\vec{a}$ son fuerzas de inercia

$\sum F_x = T_1 - m_1 a = 0 \quad (2)$ 2 $\qquad \sum F_x = N_2 - m_2 a = 0 \quad (4)$

$\sum F_y = N_1 - m_1 g = 0 \quad (3) \qquad \sum F_y = T - m_2 g = 0 \quad (5)$ 2

$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$

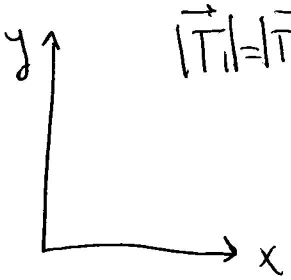
de (2) y (5): $T = m_1 a = m_2 g$

$$a = \frac{m_2}{m_1} g \quad 1$$

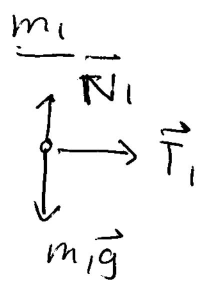
Usando (1): $\boxed{F = \frac{m_2}{m_1}(m_1+m_2+M)\,g}$

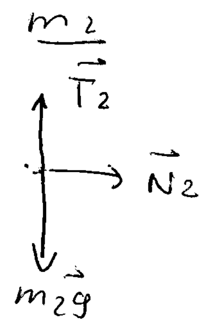
A1. Solucion 2.

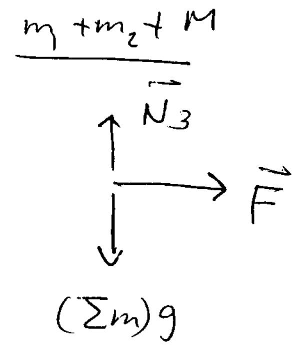
Plantear las ecuaciones de movimiento de m_1, m_2 y del sistema m_1+m_2+M, sabiendo que todas tienen aceleracion igual $\vec{a} = a\hat{i}$ ✓ 1



$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$







$\sum F_x = T = m_1 a \ (1)$ ✓ 2

$\sum F_y$ no hace falta

$\sum F_y = T - m_2 g = 0 \ (2)$ ✓ 2

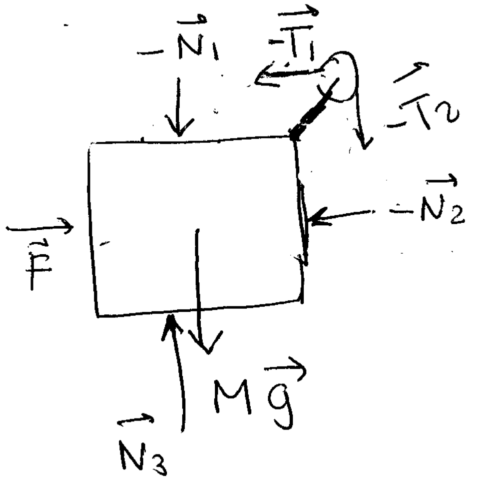
$\sum F_x$ no hace falta

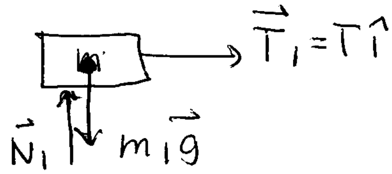
$F = (\Sigma m) a \ (3)$ ✓ 1

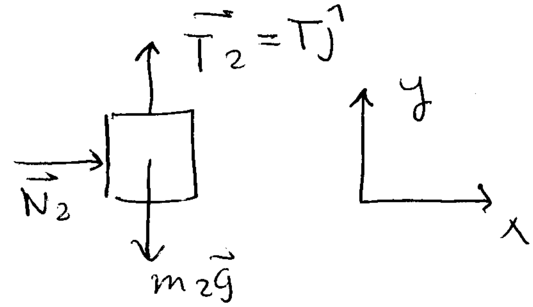
de (1) y (2): $T = m_1 a = m_2 g \Rightarrow a = \dfrac{m_2 g}{m_1}$ ✓ 1

de (3) $\boxed{F = (m_1+m_2+M)\dfrac{m_2}{m_1} g}$

A.1. Solucion 3.







$\sum F_x = T = m_1 a \quad (3)$ ✓ 1

$\sum F_y = N_1 - m_1 g = 0 \quad (4)$

$\sum F_x = N_2 = m_2 a \quad (5)$ ✓ 1

$\sum F_y = T - m_2 g = 0 \quad (6)$ ✓

$\sum F_x = F - N_2 - T = Ma \quad (1)$ ✓ 2

$\sum F_y = -N_1 + N_3 - Mg - T = 0 \quad (2)$

Sumando (1) + (3) + (5)

$F - N_2 - T = Ma$

$T = m_1 a$

$N_2 = m_2 a$

$F = (m_1 + m_2 + M)a$ ✓ 1

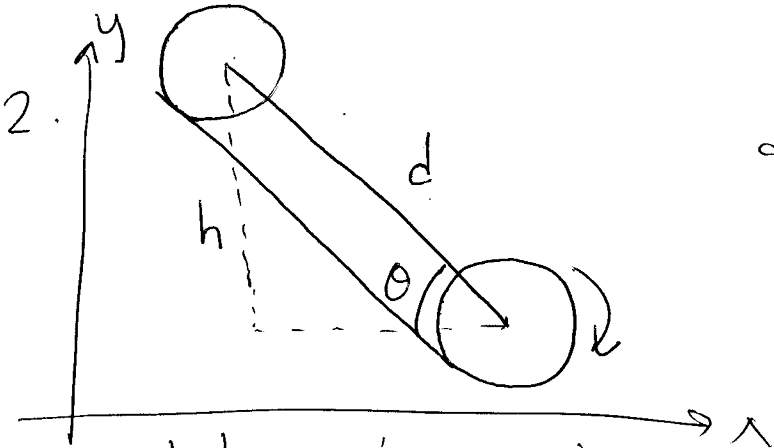
De (3) y (6)

$T = m_1 a = m_2 g$

$a = \dfrac{m_2 g}{m_1}$ ✓ 1

$$\boxed{F = (m_1 + m_2 + M)\dfrac{m_2 g}{m_1}}$$

A.2.



d = distancia recorrida

a) Conservacion de la energía mecanica.

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$mg y_i + \frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{1}{2} I \omega_i^2 = mg\, y_f + \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} I \omega_f^2$$

$$mg(y_i - y_f) = \frac{m}{2}(v_f^2 - v_i^2) + \frac{I}{2}(\omega_f^2 - \omega_i^2)$$

$$y_i - y_f = h = d \sin\theta$$

Condicion de rodadura $v = \omega r \rightarrow \omega = \frac{v}{r}$, $\frac{I}{2}\omega^2 = \frac{I}{2r^2} v^2$

$$mg\, d \sin\theta = \frac{1}{2}(v_f^2 - v_i^2)\left(m + \frac{I}{r^2}\right)$$

$$g\, d \sin\theta = \frac{1}{2}(v_f^2 - v_i^2)\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)$$

$\frac{I}{mr^2} = C$ es una caracteristica de cada cuerpo.

Esfera homogenea
$C = 2/5$

$$\boxed{v_i^2 + \frac{2g(\sin\theta)\, d}{1 + C} = v_f^2}$$

$1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$, $\frac{2}{1+C} = \frac{10}{7}$

Comparando con la relacion $v_f^2 = v_i^2 + 2ad$, $a = \frac{g \sin\theta}{1 + C}$

A 2. b) En el cascarón la masa se distribuye mas ✓ lejos del eje de rotación, por tanto $C = \frac{I}{mr^2}$ es mayor y la aceleracion es menor. Si parte del reposo, el cascarón desciende mas lento.

B.2 a) La solucion es igual que A.2 salvo que para un cilindro homogéneo $C = 1/2$.

$$v_f^2 = v_i^2 + \frac{2gh}{1+C} \quad , \quad a = \frac{g}{1+C}$$

b) La esfera desciende mas rapido porque tiene menor momento de inercia.

$$\frac{1}{1+C_{esfera}} = \frac{1}{1+2/5} > \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+C_{cilindro}}$$

A.3 Se conserva el momento angular respecto al eje de la plataforma

$L = L_{disco} + L_{estud.}$ ✓1 $\quad L_{disco} = I\omega = \frac{1}{2}MR^2\omega$ ✓1

$L_{i\,estud} = mr^2\omega$ ✓1

$L_i = L_f$ ✓1 $\quad L = \left(\frac{MR^2}{2} + mr^2\right)\omega$

$\left(\frac{MR^2}{2} + mR^2\right)\omega_i = \left(\frac{MR^2}{2} + mr^2\right)\omega_f \qquad \omega_i = \frac{2\pi}{T}$ ✓1

$$\omega_f = \omega_i \frac{\frac{MR^2}{2} + mR^2}{\frac{MR^2}{2} + mr^2} = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{1 + 2\,m/M}{1 + 2\,mr^2/MR^2}\right)$$ /

LICENCIATURA EN CIENCIAS EXACTAS
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Mecánica I

11 de Julio de 2009

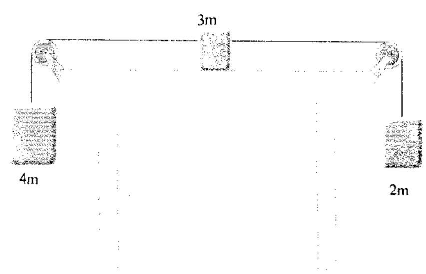
Examen Final (V.B)

Tema de desarrollo

Tome dos boleta al azar con el profesor y escoja una. Desarrolle el tema en un maximo de tres hojas.

Problema 1

Tres objetos de masas $2m$, $3m$ y $4m$ están conectados por cuerdas ligeras sobre la mesa como se muestra en la figura. La mesa es rugosa y tiene un coeficiente de fricción estático $\mu = 0{,}9$ y cinético $\mu_c = 0{,}8$. Las poleas no tienen ni fricción ni masa. Las cuerdas tampoco tienen masa. Si el sistema está inicialmente en reposo, determine la aceleración de cada objeto y las tensiones en las dos cuerdas.



Problema 2

Un cilindro homogéneo rueda hacia abajo por un plano inclinado de angulo α respecto a la horizontal.

a) Encuentre la aceleración y la velocidad del centro de masa en función de la altura h que ha descendido.

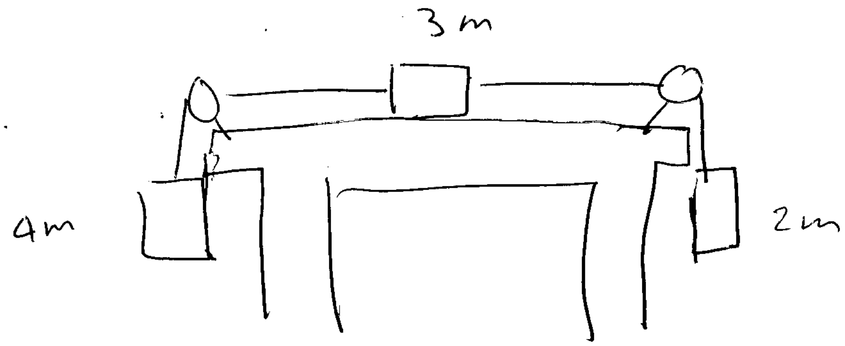
b) Si en vez de un cilindro es una esfera lo que rueda ¿desciende más rápido o más lento? ¿Por qué?

Problema 3

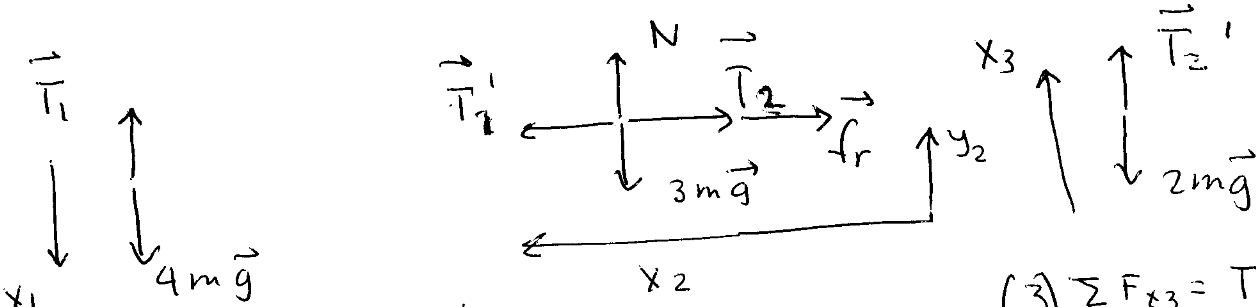
Una estrella da vueltas con un periodo T_0 en torno a un eje a través de su centro. Después de que la estrella experimenta una explosión supernova, el núcleo estelar, que tenía un radio inicial de R_0, colapsa formando en una estrella de neutrones de R_n de radio. Determine el periodo de revolución de la estrella de neutrones.

Exprese el resultado como una fórmula sin hacer cálculos numéricos. Por cultura, se informan valores típicos: $T_0 = 30$ días, $R_0 = 1{,}0 \times 10^4$ km, $R_n = 3{,}0$ km.

B.1.



El sistema tiende a moverse bajando 4m y subiendo 2m. Consideraré positivo todo lo que apunte en este sentido.



(3) $\sum F_{x_3} = T_2 - 2mg = 2ma$ ✓ 1

$|T_1'|$

(1) $\sum F_{x_1} = 4mg - T_1 = 4m\,a$ ✓ 1 (2) $\sum F_{x_2} = T_1 - T_2 - f_r = 3ma$ ✓ 1

Sumando las 3 ecuaciones obtengo

$$4mg - f_r - 2mg = (4m + 3m + 2m)a = 9ma$$

$$2mg - f_r = 9ma \quad (4)$$ ✓ 1

La maxima fuerza de roce f_r, es $f_{r\,max} = \mu N$

Como $\sum F_{y_2} = N - 3mg = 0 \implies N = 3mg$

$$f_{r\,max} = 3\mu mg = 2{,}7mg$$

de (4) hay reposo si $f_r = 2mg < f_{r\,max}$ ✓ 1

Entonces, $\boxed{a = 0}$

La fuerza de roce necesaria para mantener el reposo cumple la condición $f_r \leq \mu N$, entonces, nada se mueve.

0.5

de (1) $\boxed{T_1 = 4mg}$ (con $a = 0$)

0.5

de (2) $\boxed{T_2\ 2mg}$

2

A 2. b) En el cascarón la masa se distribuye mas lejos del eje de rotación, por tanto $C = \frac{I}{mr^2}$ es mayor y la aceleracion es menor. Si parte del reposo, el cascarón desciende mas lento.

B. 2 a) La solucion es igual que A. 2 salvo que para un cilindro homogéneo $C = 1/2$.

$$v_f^2 = v_i^2 + \frac{2gh}{1+C} \quad , \quad a = \frac{g}{1+C}$$

b) La esfera desciende mas rapido porque tiene menor momento de inercia.

$$\frac{1}{1+C_{esfera}} = \frac{1}{1+2/5} > \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+C_{cilindro}}$$

B.3. Por conservacion del momento angular

$$I_o \omega_o = I_n \omega_n \checkmark \; 2$$

$$I_o \cdot \frac{2\cancel{\pi}}{T_o} = I_n \cdot \frac{2\cancel{\pi}}{T_n} \checkmark \; 2 \left(\omega = \frac{2\pi}{T} \right)$$

Suponiendo que es una esfera homogénea,

$$I_o = \frac{2}{5} m R_o^2 \, , \; I_n = \frac{2}{5} m R_n^2 \checkmark \; 2$$

$$\frac{R_o^2}{T_o} = \frac{R_n^2}{T_n}$$

$$\boxed{T_n = T_o \left(\frac{R_n}{R_o} \right)^2} \checkmark \; 1$$