

FISICA MODERNA

Miguel Kiwi

1er. Semestre 2013

Naturaleza corpuscular de la radiación

Una de las primeras pistas de la naturaleza corpuscular de la radiación apareció con el estudio de la radiación emitida por cuerpos opacos. Estos cuerpos absorben casi toda la radiación que incide sobre ellos. La radiación absorbida aumenta la energía cinética de los átomos del material, lo cual hace subir su temperatura. Los átomos tienen cargas eléctricas y por lo tanto son acelerados al aumentar la amplitud de sus oscilaciones. Esto tiene como consecuencia una emisión de radiación electromagnética, lo que reduce su energía cinética y por lo tanto su temperatura. Cuando la tasa de emisión es igual a la de absorción, la temperatura es constante y se habla de *equilibrio térmico* con su entorno. La emisión de radiación electromagnética por estos cuerpos se llama *radiación térmica*. A temperaturas bajas esta radiación no es visible, pero sobre 700°C hay suficiente radiación en el espectro visible y cuerpo comienza a verse rojo. A temperaturas más altas aparece un rojo brillante y más arriba un color blanco.

Un cuerpo que absorbe toda la radiación que incide sobre el se llama un *cuerpo negro*. Josef Stefan, físico austriaco, encontró en 1879 que la potencia por unidad de área R irradiada por un cuerpo negro depende de la temperatura en la siguiente forma:

$$R = \sigma T^4$$

Esta ley también es conocida como la ley de Stefan-Boltzmann, ya que fué deducida por Boltzmann cinco años más tarde. Actualmente se sabe que el valor de σ es:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = 5.6704 \times 10^{-8} \quad [\text{MKS}]$$

donde k_B y h son las constantes de Boltzmann y de Planck, respectivamente y serán discutidas más adelante en este curso.

Radiación del cuerpo negro

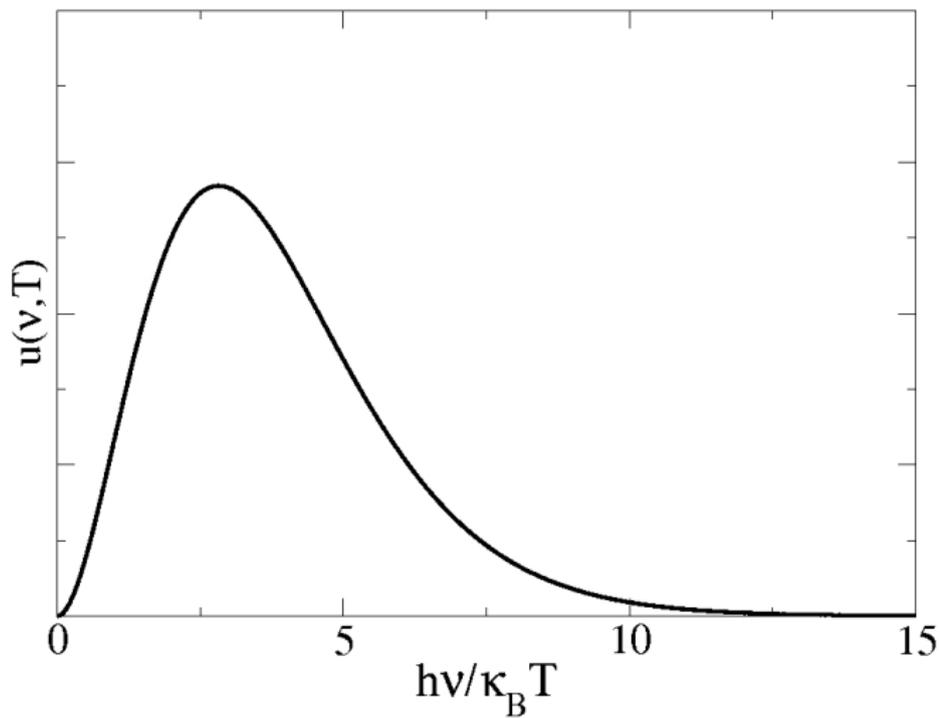
En equilibrio a una temperatura T , un cuerpo emite radiación en un gran rango de frecuencias. Entonces podemos definir la *potencia emisiva* $E(\lambda, T)$, donde $\lambda = c/\nu$, como la energía emitida a la temperatura T por unidad de tiempo y de área y por unidad de frecuencia entre ν y $\nu + d\nu$

Los primeros trabajos teóricos comenzaron en 1859 con el trabajo de Kirchhoff, que demostró que la razón entre la potencia emisiva y la *absorsividad* A es la misma para todos los cuerpos. Aquí la absorpsividad está definida como la fracción de la radiación incidente a la longitud λ absorbida por el cuerpo. También observó que para un *cuerpo negro* $E(\lambda, T)$ es una función universal. Un cuerpo negro se define como aquel que absorbe toda la radiación que cae sobre él y por lo tanto en este caso $A = 1$.

Experimentalmente el agujero negro se construye como una caja hueca a temperatura T , con un pequeño agujero por donde se emite la radiación encerrada en ella. Como el agujero es muy pequeño y la superficie interna tiene muchas imperfecciones, la fracción de la radiación que cae sobre el agujero desde afuera y que sale de la caja es ínfima.

La densidad espectral $u(\lambda, T)$ está definida como la energía emitida por unidad de volumen y por unidad de frecuencia entre ν y $\nu + d\nu$.

Experimentos realizados por Lummer y Pringsheim determinaron en 1897, la forma de la curva $u(\lambda, T)$:



Trabajos teóricos posteriores de Wien y Rayleigh determinaron que a bajas frecuencias la dependencia de $u(\lambda, T)$ en función de ν es:

$$u(\lambda, T) \simeq \frac{8\pi k_B T}{c^2} \nu^2$$

Mientras que para altas frecuencias es:

$$u(\lambda, T) \simeq C\nu^2 e^{-\beta\nu/T}$$

resultados que concuerdan con la curva experimental.

En 1900 Max Planck obtuvo la formula correcta haciendo una interpolación de los resultados anteriores. Esta formula que inicialmente no tenía justificación es la siguiente:

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

donde $h = 6.626916 \times 10^{-27}$ erg seg.

Esta formula concuerda con los resultados experimentales de Lummer y Pringsheim. Después de un intenso trabajo, Planck logró derivar esta expresión.

En primer lugar $u(\lambda, T)$ se puede escribir como:

$$u(\lambda, T) = n(\nu)w(\lambda, T)$$

donde $n(\nu)$ es el numero de modos por unidad de volumen (que será definido más adelante) y $w(\lambda, T)$ es la energía promedio por modo.



El valor de $n(\nu)$ se puede calcular de la siguiente manera:
 El campo electromagnético dentro de la cavidad cúbica de lado L puede ser considerado como una superposición de ondas estacionarias con distintos valores de $\vec{k} = [k_x, k_y, k_z]$. Por tratarse de ondas estacionarias los valores de las componentes de \vec{k} deben tener la forma:

$$k_x = \frac{\pi}{L}n_1; \quad k_y = \frac{\pi}{L}n_2; \quad k_z = \frac{\pi}{L}n_3; \quad |k| = \frac{\omega}{c} = \frac{\pi}{L}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

Donde n_1, n_2, n_3 son números enteros. Cada conjunto de números se designa como un modo y estos modos corresponden a puntos espaciados una distancia π/L en el espacio k . Así en un cubo de

lado k_m hay $\left(\frac{L}{\pi}\right)^3 k_m^3$ puntos o modos. Similarmente podemos decir

que dentro de una esfera de radio $k_m = \frac{\omega_m}{c}$ hay $\left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \frac{4}{3}\pi k_m^3$ modos.

Considerando que hay dos polarizaciones por modos y usando $k_m = \omega_m/c = 2\pi\nu_m/c$, vemos que el número de modos por unidad de volumen, en un octante de la esfera es:

$$N(\nu < \nu_m) = \frac{8\pi}{3} \frac{L^3 \nu^3}{c^3}$$

El número de modos por unidad de volumen y por unidad de frecuencia ν se obtiene de:

$$n(\nu) = \frac{d}{d\nu} \left(\frac{N(\nu < \nu_m)}{V} \right) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

Para calcular la energía promedio por modo $w(\nu, T)$, Max Planck describió los modos dentro de la cavidad como un conjunto de osciladores e impuso la siguiente suposición radical: la energía de estos osciladores puede aumentar o disminuir sólo por montos discretos proporcionales a la frecuencia ν , i.e. *la energía para una frecuencia ν está dada por $E = nh\nu$, donde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$*

Esto llevo a la idea de **cuantos de energía de valor $h\nu$** .

Así podemos calcular el promedio de la energía como:

$$w(\nu, T) = \langle E \rangle = \sum_E EP(E) \quad \text{con} \quad P(E) = \frac{e^{-E/k_B T}}{\sum_E e^{-E/k_B T}}$$

Escribiendo $x = h\nu/k_B T$:

$$P(E) = \frac{e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}} = \frac{e^{-nx}}{(1 - e^{-x})^{-1}}$$

y por lo tanto:

$$w(\nu, T) = h\nu(1 - e^{-x}) \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

De esta manera la densidad espectral la podemos escribir como:

$$u(\nu, T) = n(\nu)w(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

Efecto fotoeléctrico

Una de las ironías de la historia de la física es que Heinrich Hertz, que experimentalmente demostró que la luz es una onda electromagnética también descubrió el efecto fotoeléctrico, descubrimiento que llevó que llevó directamente a la descripción corpuscular de la luz.

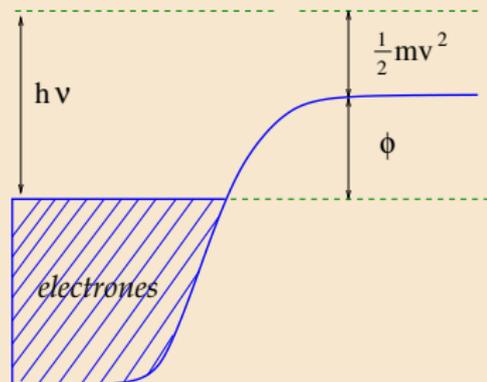
En 1897 Thomson había demostrado la existencia del electron mediante un experimento con un tubo de rayos catódico y había encontrado el valor de e/m . Por su parte Hertz en 1887 descubrió que una superficie metálica puede emitir partículas cargadas eléctricamente cuando s ilumina con luz de longitud de onda corta. En 1898 Thomson demostró que estas partículas tenían el mismo valor de e/m obtenido en 1897. Así se concluyó que estas partículas eran electrones.

Los resultados del experimento de Hertz se pueden resumir como sigue:

- La corriente de electrones es proporcional a la intensidad de la luz.
- Para una superficie dada los electrones aparecen solamente si la frecuencia de la luz supera cierto umbral, sin importar la intensidad de la luz o el tiempo en que la luz incide sobre la superficie.
- La máxima energía cinética de los electrones emitidos es una función lineal de la frecuencia de la luz y es independiente de la intensidad de la luz incidente.

Estos resultados no pudieron ser explicados en base a la teoría clásica del electromagnetismo. Sin embargo en 1905 Einstein propuso una explicación basada en la idea de los cuantos de energía de Planck. Así al incidir luz de frecuencia ν , lo que ocurre es que un fotón o cuanto de energía $h\nu$ entrega esta energía al electron. El electron debe superar una barrera de energía ϕ antes de salir con energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$:

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - \phi$$



Efecto Compton

Es un proceso de colisión de la luz con electrones libres o débilmente ligados. Este efecto ocurre en la región rayos-X del espectro electromagnético.

Cuando una radiación cae sobre material los electrones oscilan con la misma frecuencia de la radiación incidente y emiten una radiación cuya intensidad depende de λ^{-4} . Lord Rayleigh realizó un estudio teórico de este fenómeno y explicó el color azul del cielo. En 1909 se encontró que este fenómeno también ocurre en rayos-X.

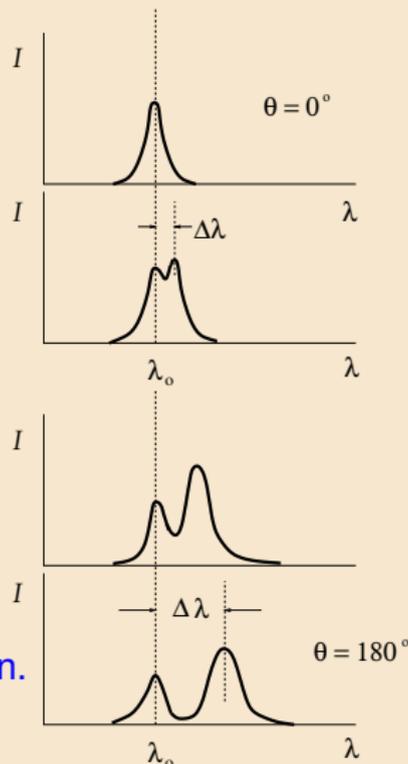


Al realizar este experimento con rayos-X, el físico Arthur Compton sin embargo encontró que además del haz principal (sin corrimiento en λ), aparece una componente desplazada que no puede ser explicada con la teoría de Rayleigh. Encontró una relación simple entre el corrimiento de la longitud de onda y el ángulo de scattering.

$$\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos \theta)$$

Aquí $\lambda_C = \text{const.} = 0.024 \text{ \AA}$ y por lo tanto $\Delta\lambda$ es completamente independiente de la longitud de onda incidente.

λ_C se llama la longitud de onda de Compton.



En la primera de las últimas tres ecuaciones escribimos $\Delta\nu = \nu - \nu'$ y elevamos al cuadrado la ecuación resultante para obtener:

$$(h\Delta\nu)^2 + 2m_0hc^2\Delta\nu = m_0^2c^4 \frac{v^2}{c^2 - v^2}$$

En las ecuaciones siguientes eliminamos ϕ utilizando $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$ y obtenemos:

$$h^2 \left[(\Delta\nu)^2 + 2\nu(\nu - \Delta\nu)(1 - \cos\theta) \right] = m_0^2c^4 \frac{v^2}{c^2 - v^2}$$

Como las dos últimas ecuaciones tienen idénticos lados derechos:

$$m_0hc^2\Delta\nu = h^2\nu(\nu - \Delta\nu)(1 - \cos\theta) \quad \rightarrow \quad \frac{c\Delta\nu}{\nu(\nu - \Delta\nu)} = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\theta)$$

Pero

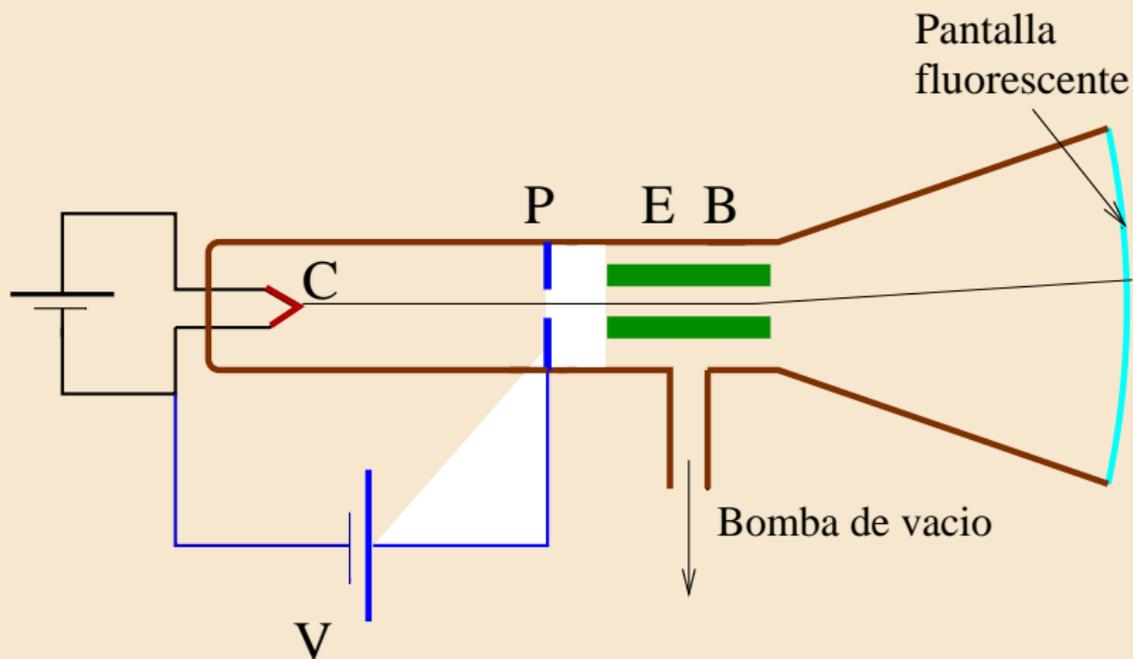
$$|\Delta\lambda| = \left| \frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu - \Delta\nu} \right| = \frac{c\Delta\nu}{\nu(\nu - \Delta\nu)}$$

lo que nos da finalmente

$$|\Delta\lambda| = \lambda_c(1 - \cos\theta) \quad \text{donde} \quad \lambda_c = \frac{h}{m_0c} = 0.024\text{\AA}$$

El Electron

Descubrimiento del electron



El cátodo C se encuentra a alta temperatura y emite electrones, los que son acelerados por el campo eléctrico producido por la fuente V y pasan a través de la pantalla colimadora P.

Los campos magnético B y eléctrico E producen una fuerza:

$$F = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

y desvían el haz de electrones. La condición para que la deflección sea igual a cero es:

$$E = vB \quad (*)$$

En los experimentos realizados en 1897, J.J.Thomson encontró que:

- Para $E = 0$ y $B = 0$ no hay deflección del haz.
- Al aplicar un campo E el haz se deflecta.
- La deflección vuelve a cero si se cumple (*).

Determinación de e/m

Si ℓ es el largo de las placas que deflektan el haz, la deflección en la pantalla fluorescente vale:

$$y = \frac{eE\ell^2}{2mv^2}$$

Reemplazando

$$v = \frac{E}{B}$$

podemos determinar la razón entre la carga y masa del electrón:

$$\frac{e}{m} = \frac{2yE}{B^2\ell^2}$$

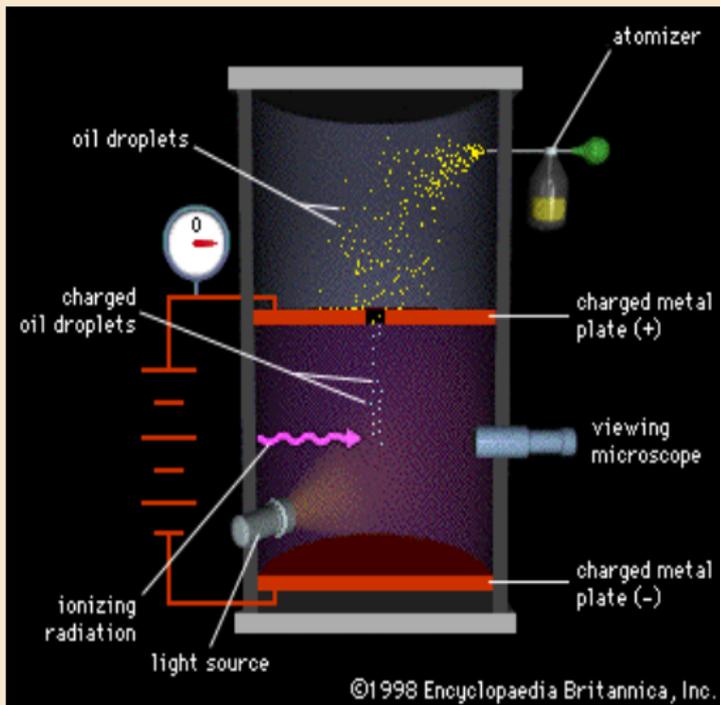
mediante la medición de la deflección y en la pantalla fluorescente.

Experimento de Millikan

Determinación de la carga del electron

El experimento de Millikan se muestra en la figura de al lado. Se deja caer gotas de aceite producidas por un atomizador. Estas pasan por un pequeño agujero en la placa superior de un condensador. Al ser iluminadas las gotas se ven como esferitas brillantes, contra un fondo negro. Las gotas caen por acción de la gravedad, pero luego, debido a la fricción, adquieren una velocidad constante.

Millikan notó que al colocar un campo eléctrico las gotitas se movían hacia arriba o hacia abajo, lo que constituía un evidencia de que estaban cargadas.



Al aumentar el campo eléctrico las gotas se mueven hacia arriba. Sin embargo, algunas gotas sufren un cambio discontinuo en su velocidad. Esto se debe a un cambio en la carga eléctrica de la gota o a la atracción de un ion.

La idea de Millikan fue la medir la velocidad de la gota y calcular la fuerza considerando que sobre ella actúan la gravedad, la fricción y el campo eléctrico.

Para un análisis cuantitativo del experimento, consideremos que la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad (ley de Stokes), $D = Cv$. Supongamos una gota que tiene una carga q_1 y una velocidad v'_1 , cuando se aplica un campo E :

$$Cv'_1 + mg - q_1E = 0$$

Con un campo nulo la gota se caerá con velocidad constante v :

$$Cv - mg = 0$$

de donde obtenemos:

$$q_1 = \frac{mg}{E} \frac{v + v'_1}{v}$$

Ahora si la velocidad de la gota cambia de v'_1 a v'_2 , debido a una nueva carga q_2 en la gota, obtenemos:

$$q_2 = \frac{mg}{E} \frac{v + v'_2}{v}$$

y por lo tanto:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{v + v'_1}{v + v'_2}$$

En el experimento se encuentra que los valores numéricos de esta expresión son muy cercanos a fracciones entre números enteros, lo demuestra que las cargas deben ser múltiplos de una misma cantidad. Este es un punto clave en el éxito de este experimento.

Para obtener la carga del electrón debemos averiguar la masa de la gotita de aceite. Para eso utilizamos la ley de Stokes para la fricción del aire sobre la gota, que dice que la fuerza de fricción es $D = 6\pi a\eta v$, donde a es el radio de la gota, η la viscosidad del aire y v la velocidad terminal de la gota. Luego, sin campo eléctrico aplicado:

$$D - mg = 6\pi a\eta v - \frac{4}{3}\pi a^3 \rho g = 0 \quad \rightarrow \quad a = \left[\frac{9\eta v}{2\rho g} \right]^{1/2}$$

y por lo tanto:

$$m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$$

Veamos un **ejemplo concreto**, a fin de aclarar el procedimiento.

Supongamos que el tiempo que le toma a una gota para recorrer la distancia 0.6 cm, sin campo eléctrico es 21 seg. Pero con un campo eléctrico de 2.84×10^5 V/m se miden los siguientes tiempos de ascenso:

$$t_1 = 46.0; \quad t_2 = 15.5; \quad t_3 = 28.1; \quad t_4 = 12.9; \quad t_5 = 45.3; \quad t_6 = 20.0 \quad \text{seg}$$

La velocidad terminal sin campo eléctrico aplicado es $v = 0.6/21 = 0.0286$ cm/seg y las velocidades de ascenso con campo eléctrico aplicado son:

$$v'_1 = 0.0130; \quad v'_2 = 0.0387; \quad v'_3 = 0.0214 \quad \text{cm/seg}$$

$$v'_4 = 0.0465; \quad v'_5 = 0.0132; \quad v'_6 = 0.0300 \quad \text{cm/seg}$$

de donde obtenemos:

$$\frac{q_1}{q_2} = 0.618 \simeq \frac{3}{5}; \quad \frac{q_2}{q_3} = 1.35 \simeq \frac{4}{3}; \quad \frac{q_3}{q_4} = 0.6 \simeq \frac{2}{3}$$

$$\frac{q_4}{q_5} = 1.8 \simeq \frac{9}{5}; \quad \frac{q_5}{q_6} = 0.713 \simeq \frac{7}{10}$$

Ahora, usando el valor de v obtenemos:

$$a = \left[\frac{9\eta v}{2\rho g} \right]^{1/2} = 1.67 \times 10^{-6} \quad \text{m} \rightarrow V = \frac{4}{3}\pi a^3 = 1.95 \times 10^{-17} \quad \text{m}^3$$

y entonces $m = \rho V = 1.6 \times 10^{-14} \text{ Kg}$

Con estos valores podemos calcular las cargas de las gotitas:

$$q_1 = 8.39 \times 10^{-19} \text{ C}; \quad q_2 = 13.6 \times 10^{-19} \text{ C}; \quad q_3 = 10.1 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$q_4 = 15.2 \times 10^{-19} \text{ C}; \quad q_5 = 8.43 \times 10^{-19} \text{ C}; \quad q_6 = 11.8 \times 10^{-19} \text{ C}$$

En la época de Millikan se sabía que la carga del electrón e tenía un valor entre 1.5×10^{-19} y 2.0×10^{-19} C. Dividiendo estos valores por las cargas q 's tenemos un rango para el número entero de cargas e en cada gota. Por ejemplo para q_1 este número entero debe estar entre $8.39/1.5=5.6$ y $8.39/2.0=4.2$, entonces elegimos el valor 5. Y por lo tanto en este caso $e = e_1 = 1.68 \times 10^{-19}$ C. El mismo procedimiento se aplica a todas las cargas restantes y obtenemos:

$$e_2 = 13.6/8 = 1.7 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$e_3 = 10.1/6 = 1.68 \times 10^{-19} \text{ C}; \quad e_4 = 15.2/9 = 1.69 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$e_5 = 8.43/5 = 1.69 \times 10^{-19} \text{ C}; \quad e_6 = 11.8/7 = 1.69 \times 10^{-19} \text{ C}$$

El valor final se obtiene promediando el resultado de un gran número de medidas de este tipo. Sin embargo Millikan se dió cuenta que la fórmula de Stokes debería ser corregida para partículas muy pequeñas, como las gotitas de aceite utilizadas en este experimento. Con esta fórmula corregida obtuvo valores un poco menores a los obtenidos más arriba.

El valor aceptado actual de la carga del electron es 1.60217×10^{-19} C

Tamaño del electrón

Se puede estimar igualando su energía electrostática con la energía de la masa en reposo, suponiendo una distribución uniforme de carga:

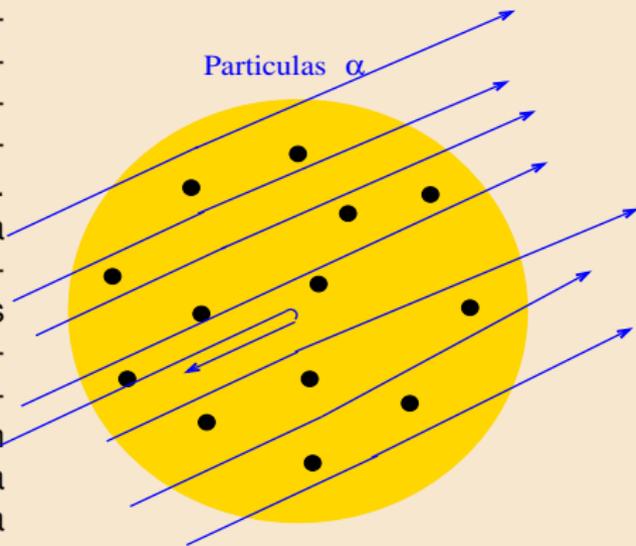
$$E_C = \frac{1}{2} \frac{e^2}{C} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_e} = m_0 c^2$$

lo que nos da:

$$r_e = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 m_0 c^2} = 2.8 \times 10^{-15} \text{ m}$$

Atomo de Rutherford

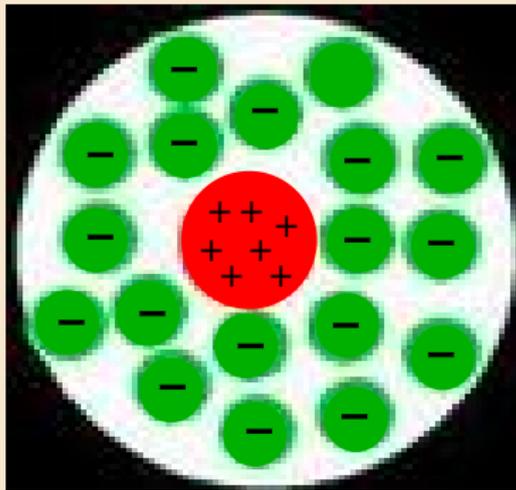
Ernest Rutherford fué un físico neozelandés y alumno de Thomson. El continuó la línea de trabajo de su maestro. En 1909 comenzó una serie de trabajo junto a sus estudiantes Hans Geiger (alemán) y Ernest Mardsen (inglés). El quería averiguar la distribución de la masa dentro del átomo. Para ello utilizó un haz muy colimado de partículas α (átomos cargados de He) que chocaban contra un lámina de oro muy delgada. Los experimentos mostraban que en general las partículas α atravesaban la lámina y se desviaban muy poco de la dirección del haz incidente



Esto estaba muy de acuerdo con el modelo de Thomson, ya que las masivas partículas α difícilmente podían ser desviadas por los electrones mucho más livianos. Sin embargo, un día Geiger le comunicó que había observado que algunas partículas α viajaban hacia atrás después de chocar con la lámina. Esto le pareció a Rutherford un evento imposible.

La única posibilidad de la ocurrencia de este evento, era que la mayor parte de la masa del átomo estuviera concentrada en una parte muy pequeña del átomo.

Así nació el modelo del átomo de Rutherford que incorporaba por primera vez el concepto de un núcleo atómico cargado positivamente.



Rutherford fué capaz de deducir una expresión para número de partículas α que se desvían en un ángulo θ c/r al haz incidente y que llegan, por unidad de tiempo, al detector ubicado a una distancia R del punto de colisión con la lámina:

$$\mathcal{N} = \frac{C}{R^2 \sin^4(\theta/2)}$$

Esta expresión fué confirmada por experimentos realizados por Geiger y Marsden. La fórmula la obtuvo Rutherford considerando una energía de interacción coulombiana entre el núcleo y partículas con una energía cinética incidente $m_\alpha v_\alpha^2/2$. Rutherford se dió cuenta que esta fórmula es válida para energías relativamente bajas, ya que cuando la partícula α se acerca mucho al núcleo aparecen otro tipo de fuerzas. De esta manera pudo obtener una estimación del radio del núcleo. Si v_α es la máxima velocidad para la cual es válida la fórmula anterior, el supuso que la partícula llega a un acercamiento máximo del núcleo, lo que nos da una estimación de su radio r_n , el cual se puede obtener de:

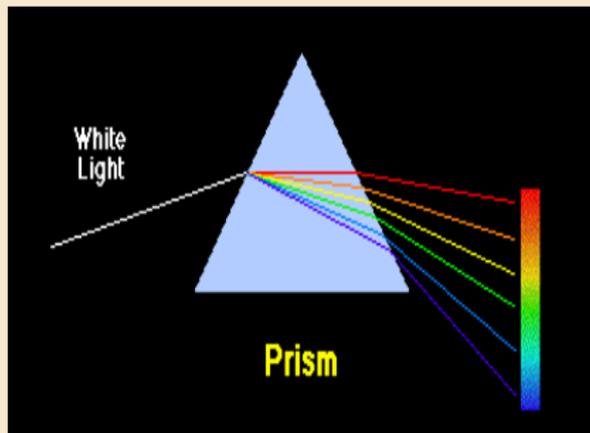
$$\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = k \frac{(Ze)(2e)}{r_n^2}$$

De esta manera se obtuvieron estimaciones de $r_n \simeq 10^{-15}$ m. Estas estimaciones están de acuerdo con mediciones más precisas realizadas posteriormente.

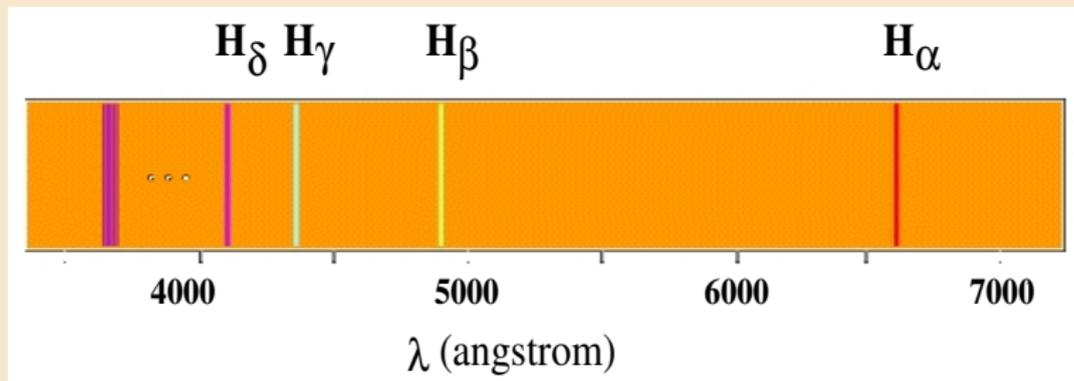
Espectro atómico

Desde la época de Newton se utilizó el espectrómetro, el cual tiene como principal componente un prisma de vidrio. Se descubrió que los elementos químicos mostraban espectros continuos, en bandas y líneas. Resulto que la forma como están distribuidas la línea en el espectro es una característica propia de cada elemento.

En las figuras siguientes se muestra espectros del Helio y el Mercurio.



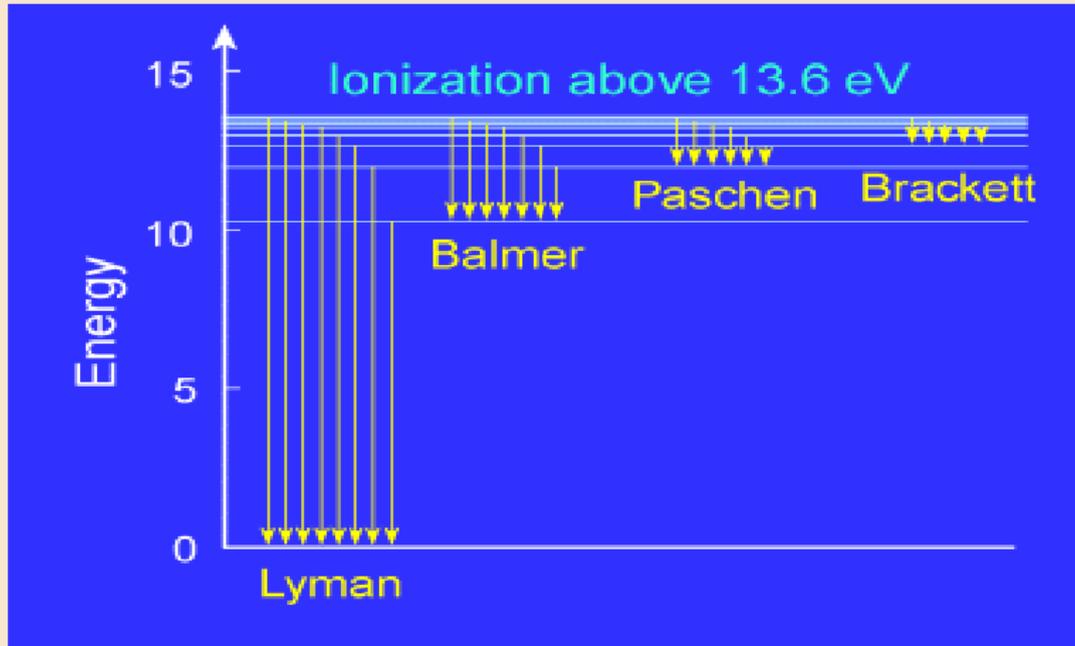
Uno de los elementos más estudiados fue el Hidrogeno.



En 1885 el profesor suizo de colegio Johann Balmer encontró que algunas de las líneas del hidrógeno podían ser representadas por la formula empírica:

$$\lambda_n = 346.6 \frac{n^2}{n^2 - 4} \text{ nm}$$

Estas líneas corresponden al rango visible y cerca del ultravioleta. Un espectro del hidrógeno más completo se muestra en la figura siguiente:



La fórmula de Balmer se puede escribir en una forma más general como:

$$\frac{1}{\lambda_{nm}} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

y es conocida como la fórmula de Rydberg-Ritz. La constante R es la constante de Rydberg, que para el hidrógeno tiene el valor:

$$R = 1.09677 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Atomo de Bohr

A mediados del siglo diecinueve (Kirchhoff y Bunsen) cada elemento posee su propio espectro. El átomo de hidrógeno fue uno de los más estudiado. En 1885 Balmer encontró que este espectro podía ser reproducido por la fórmula

$$\lambda = \text{const} \frac{n^2}{n^2 - 4}$$

que también se puede escribir como

$$\nu = R_H \left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right] \quad \text{para } n > 2$$

o

$$\Delta\nu = R_H \left[\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right] \quad \text{para } n' < n$$

conocida como la fórmula de Rydberg y R_H la constante de Rydberg. Los números n se llaman **números cuánticos**.

Postulados de Bohr

Siguiendo la idea del modelo de Rutherford, Bohr supone que los electrones giran alrededor del núcleo con un radio r y una velocidad v . El equilibrio entre la fuerza centrífuga y la culombiana nos da:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_0 v^2}{r}$$

luego la energía total es:

$$E = \frac{1}{2}m_0 v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

Así como está planteado este modelo no aporta nada nuevo c/r al de Rutherford. Sin embargo el presenta estos dos problemas:

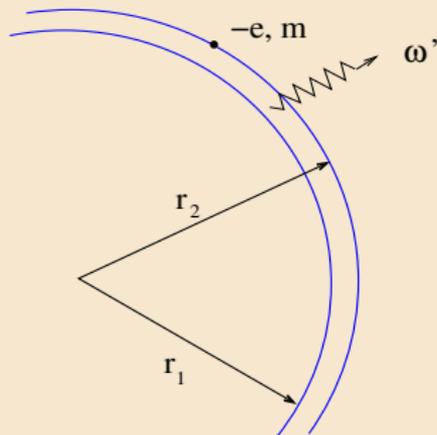
- Muestra un espectro continuo.
- Electrones acelerados deben emitir OEM de frecuencia $\nu = v/2\pi r$ y pierden energía.

Para superar estos problemas Bohr formula tres postulados que representan una desviación *c/r* al comportamiento clásico de la dinámica del electron en un átomo.

- Sólo niveles discretos de energía E_n son permitidos.
- La diferencia de energía entre dos niveles es $E_n - E_{n'} = h\nu$ y por lo tanto el átomo no emite radiación, a menos que electron gane o pierda suficiente energía como para cumplir esta ecuación.
- Al crecer el radio r de la órbita electrónica las leyes de la física cuántica llegan a ser idénticas con la de física clásica.

Principio de correspondencia

Este principio dice que para grandes números cuánticos la física cuántica debe tender a la física clásica. Esta idea fue utilizada por Bohr para concluir que el momento angular debe ser cuantizado. Para ver como se llega a esta conclusión considere dos órbitas contiguas de números cuánticos muy grandes.



Queremos encontrar una relación entre la energía E del electron y su momento angular. Para eso partimos de un cálculo clásico igualando la fuerza de culombiana y la centrífuga:

$$-\frac{ke^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \quad \text{y} \quad L = m_e v r$$

luego:

$$r m_e k e^2 = (m_e v r)^2 = L^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{m_e k e^2}{L^2} \quad \text{entonces,} \quad E = -\frac{ke^2}{2r} = -\frac{1}{2} \frac{m_e k^2 e^4}{L^2}$$

y con $\hbar = h/2\pi$

$$\frac{dE}{dL} = \frac{m_e k^2 e^4}{L^3} \quad \text{pero} \quad m_e k^2 e^4 = L^3 / \omega \quad \rightarrow \quad \frac{dE}{dL} = \omega \quad \text{pero} \quad dE = \hbar \omega'$$

$$\text{i.e.} \quad \hbar \omega' = \omega dL$$

Sin embargo en la teoría clásica la frecuencia irradiada por el electron debe ser la misma que la de su órbita: $\omega' = \omega$:

$$dL = \hbar \quad \text{y por lo tanto} \quad L = n\hbar$$

La expresión para la energía la podemos obtener de:

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{ke^2}{r} = \frac{ke^2}{2r} - \frac{ke^2}{r} = -\frac{ke^2}{2r}$$

es decir:

$$E = -\frac{1}{2} \frac{m_e k^2 e^4}{L^2} = -\frac{1}{2} \frac{m_e k^2 e^4}{n^2 \hbar^2} = -\frac{ke^2}{2a_0} \frac{1}{n^2} = -\frac{E_0}{n^2}$$

donde a_0 tiene unidades de longitud y vale:

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e k e^2} = 0.0529 \text{ nm} = 0.529 \text{ \AA}$$

y

$$E_0 = \frac{mk^2 e^4}{2\hbar^2} = 2.18 \times 10^{-18} \text{ J} = 13.6 \text{ eV}$$

La diferencia entre las energías E_i y E_f está dada por:

$$h\nu = E_i - E_f = -\frac{E_o}{n_i^2} + \frac{E_o}{n_f^2} \rightarrow \nu = \frac{E_o}{h} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

y por lo tanto:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_o}{hc} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = R \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

donde

$$R = \frac{E_o}{hc} = \frac{mk^2e^4}{3\pi c\hbar^3}$$

esta es la predicción de Bohr para la constante de Rydberg.

Usando la cuantización del momento angular $L = m_e v r = n\hbar$ y la ecuación para el equilibrio de fuerzas $ke^2/r^2 = m_e v^2/r$, podemos obtener el radio de la órbita con número cuántico n :

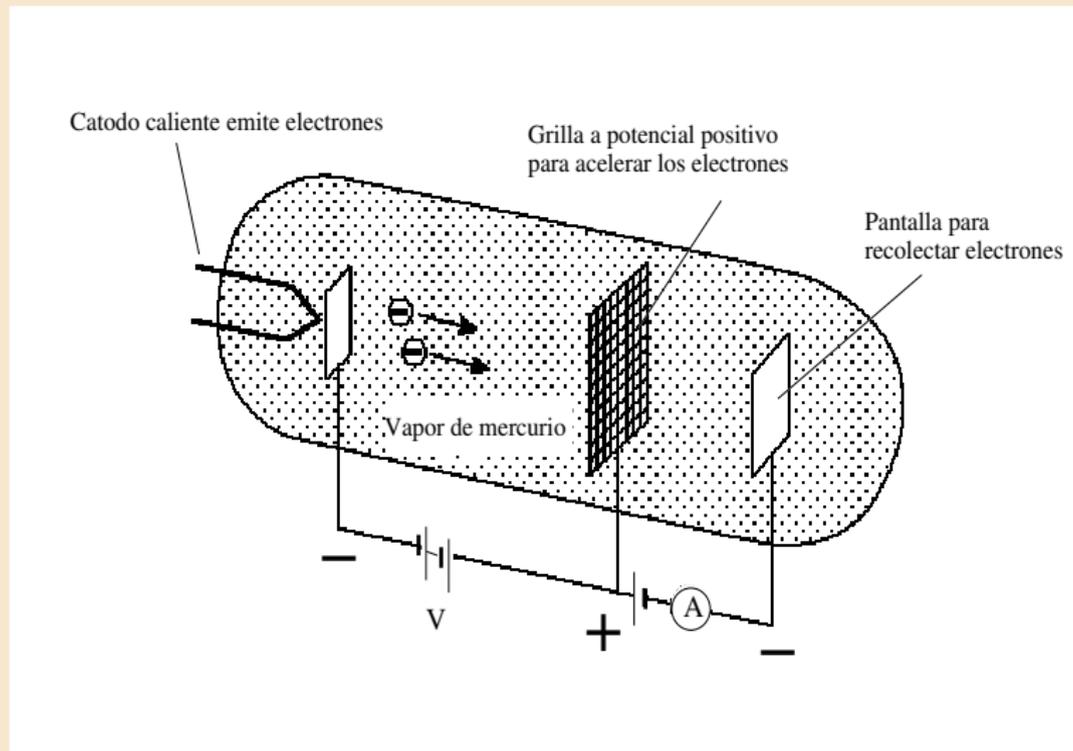
$$r_n = \frac{(n\hbar)^2}{m_e k e^2}$$

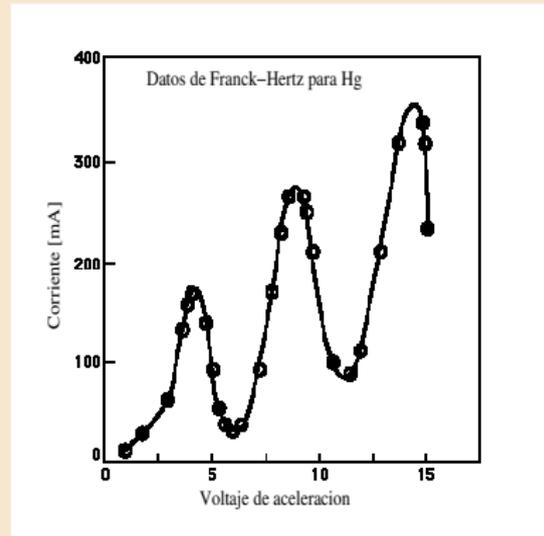
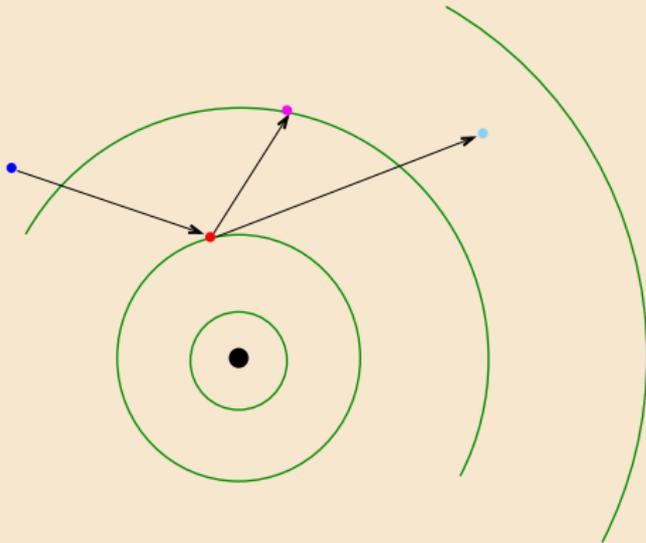
La expresión anterior para $1/\lambda$ está de acuerdo con la fórmula de Balmer para $n_f = 2$ y $n_i = 3, 4, 5 \dots$ y también con las líneas de Paschen con $n_f = 3$ y $n_i = 4, 5, 6 \dots$, conocidas en 1913. Más adelante en 1916 Lyman encontró las líneas correspondientes a $n_f = 1$, en 1922 Brackett las líneas con $n_f = 4$ y Pfund las correspondientes a $n_f = 5$.

Experimento de Franck-Hertz

La primera prueba de la existencia de los niveles de energía discretos fué obtenida por los físicos alemanes James Franck y Gustav Hertz en 1914. Para ello utilizaron el aparato que se muestra en la figura siguiente. Los electrones son emitidos por un filamento caliente. Estos electrones son acelerados por un potencial variable V a través de un gas de átomos de Hg. y pueden atravesar una grilla positiva. Los electrones que tengan suficiente energía cinética pueden superar el potencial retardador y llegar a la pantalla recolectora.

A bajos valores de V la corriente medida por el amperímetro A es baja debido a que la mayoría de los electrones llegan con una energía cinética insuficiente para superar el potencial retardador. Al subir V crece la corriente pero los electrones llegarán a tener una energía suficiente para excitar un electron de un átomo Hg. El electron incidente pierde energía y no puede llegar a la pantalla, lo que produce una disminución de la corriente.





Dualidad onda-materia

En 1924 Louis de Broglie propuso en sus tesis doctorales que el comportamiento dual onda-partícula no sólo era aplicable a la radiación electromagnética sino también era una característica de la materia en general. Hasta ese entonces no había ninguna evidencia de aspectos ondulatorios del electrón u otras partículas. Esta idea surgió pensando que ya que el universo está formado de radiación y materia, debería haber una simetría entre ambos, y por lo tanto si la radiación tenía un comportamiento dual onda-partícula, también lo debería tener la materia.

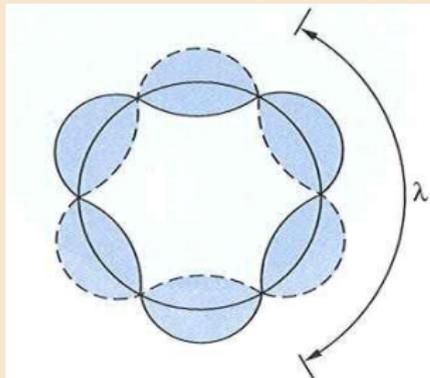


Formalmente de Broglie propuso su teoría a través de las llamadas **ecuaciones de De Broglie**:

$$\nu = \frac{E}{h} \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

Estas ecuaciones resultan directamente de la cuantización de Planck

$$E = pc = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$



También se dió cuenta que sus ecuaciones llevaban a una interpretación física de la cuantización del momento angular de Bohr:

$$L = mvr = n\hbar \quad \rightarrow \quad 2\pi r = \frac{nh}{mv} = \frac{nh}{p} = n\lambda$$

Es decir la circunferencia de la órbita es igual a un número entero de longitudes de onda.

Para tener una idea de la magnitud de la longitud de onda de la materia *longitud de onda de de-Broglie*, veamos algunas ejemplos:

- Longitud de onda de una pelota de ping-pong.

Tomemos una pelota de ping-pong de 2.0 g con una velocidad de 5.0 m/seg.

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{2 \times 10^{-3} \times 5.0} = 6.6 \times 10^{-23} \text{ nm}$$

esto es 17 órdenes de magnitud más pequeña que el tamaño típico del núcleo atómico.

- Electron de baja energía.

Para un electron de una energía cinética de 10 eV, con $mc^2 = 0.511 \times 10^6 \text{ eV}$ con $hc = 1.24 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ se obtiene

$$\lambda = 0.39 \text{ nm}$$

Dualidad onda-materia

En 1925 C.J. Davisson y L.H. Germer (dos alumnos de James Franck) conjeturaron que la naturaleza ondulatoria de electrones podría ser detectada mediante un experimento de difracción en e^- por cristales. Lograron además demostrar experimentalmente su conjetura. Con ello se estableció la dualidad onda materia de manera definitiva.