Termodinámica

Corrección de la Tarea 1

Universidad del Chile, Facultad de Ciencias,
Departamento de Física, Santiago, Chile

Ayudante: Felipe González
Profesor: Rodrigo Ferrer

Última corrección

16 de agosto de 2007

Problema 1
Debemos demostrar que la expansión de Taylor para una función $\psi = \psi(x,y,z)$ está dada por

$$\psi(x+dx, y+dy, z+dz) = e^{\vec{dr}\cdot\vec{\nabla}}\psi(x,y,z). \tag{1.1}$$

Para una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, se demostró que la expansión de Taylor está dada por

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(x)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(x)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)(x-a)^3 + \cdots$$

o bien

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \frac{1}{1!}f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)h^3 + \cdots \\ &= f(x) + \frac{1}{1!}\frac{df}{dx}(x)dx + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}(x)dx^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3f}{dx^3}(x)h^3 + \cdots \\ &= f(x) + \frac{1}{1!}df + \frac{1}{2!}d^2f + \frac{1}{3!}d^3f + \cdots \end{aligned}$$

Quedémonos con la última representación de (), extendiéndola al caso de tres variables:

$$\Psi(\vec{r}+d\vec{r}) = \Psi(\vec{r}) + \frac{1}{1!}d\Psi + \frac{1}{2!}d^2\Psi + \frac{1}{3!}d^3\Psi + \cdots \tag{1.2}$$

Como no sabemos qué es $d^n\Psi$ para $n \neq 1$, calculémoslo a partir de $n=1$:

$$\begin{aligned} d\Psi &= \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)dz \\ \Rightarrow\quad d^2\Psi &= d(d\Psi) \\ &= \left(\frac{\partial(d\Psi)}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial(d\Psi)}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial(d\Psi)}{\partial z}\right)dz \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)dz\right]dx \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)dz\right]dy \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)dz\right]dz \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)dx^2 + \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z}\right)dxdz \\
+ \quad & \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial x}\right)dydx + \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right)dy^2 + \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial z}\right)dydz \\
+ \quad & \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z\partial y}\right)dzdy + \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)dz^2
\end{aligned}
$$

y como las derivadas cruzadas son iguales,

$$
\begin{aligned}
d^2\Psi &= \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)dx^2 + \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right)dy^2 + \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)dz^2 \\
&+ 2\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}\right)dxdy + 2\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z}\right)dxdz + 2\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial z}\right)dydz \\
&= \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\Psi.
\end{aligned}
$$

Puede repetir el cálculo con $d^3\Psi$ y se dará cuenta (puede demostrar por inducción, pero no es necesario) que

$$
d^n\Psi = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^n\Psi. \tag{1.3}
$$

Usando este resultado, llegamos a la expansión de Taylor para una función de tres variables:

$$
\begin{aligned}
\Psi(\vec{r}+d\vec{r}) &= \Psi(\vec{r}) + \frac{1}{1!}d\Psi + \frac{1}{2!}d^2\Psi + \frac{1}{1!}d^3\Psi + \cdots \\
&= \Psi + \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi + \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\Psi + \cdots \\
&= \left[\left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right) + \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 + \cdots\right]\Psi \\
&= \left(1 + d\vec{r}\cdot\vec{\nabla} + (d\vec{r}\cdot\vec{\nabla})^2 + (d\vec{r}\cdot\vec{\nabla})^3 + \cdots\right)\Psi \\
&= e^{d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}}\Psi.
\end{aligned}
$$

Problema 2
El trabajo en un proceso

a) isocórico es cero, ya que $dV = 0$ (volumen constante).

b) isobárico es $P(V_f - V_o)$ (presión constante).

c) isotérmico es $NRT\ln\frac{V_f}{V_o}$ (temperatura constante).

d) adiabático se cumple PV^γ, por lo que el trabajo es $\frac{1}{\gamma-1}(P_oV_o - P_fV_f)$.

Problema 3
El trabajo hecho SOBRE un gas para comprimirlo está dado por $-\int PdV$, mientras que el realizado POR el gas, es $\int PdV$. Como $PV^\gamma = K = P_oV_o^\gamma = P_fV_f^\gamma$ y el trabajo que debemos calcular es el trabajo hecho por el sistema, tenemos

$$\begin{aligned}
W &= \int_{V_o}^{V_f} P\ dV \\
&= \int_{V_i}^{V_f} V^{-\gamma}K\ dV \\
&= \frac{K}{1-\gamma}(V_f^{-\gamma+1} - V_i^{-\gamma+1}) \\
&= \frac{KV_f^{-\gamma}}{1-\gamma}V_f - \frac{KV_i^{-\gamma}}{1-\gamma}V_i \\
&= \frac{P_iV_i^\gamma V_f^{-\gamma}}{1-\gamma}V_f - \frac{P_iV_i^\gamma V_i^{-\gamma}}{1-\gamma}V_i \\
&= \frac{P_iV_i - P_fV_f}{\gamma - 1}.
\end{aligned}$$

Problema 4
Como la presión P es constante, estamos frente a un proceso de compresión isobárica. Para lograr esto, la temperatura debe disminuír a medida que disminuye el volumen (se puede lograr con alguna especie de ventilación). El trabajo ejercido sobre el gas es 0,025 $[cal]$, luego

$$\begin{aligned}
& W &&= -\int_{x_o}^{x_f} F\ dx \\
\Rightarrow\ & W &&= -\int_{x_o}^{x_f} P \cdot A\ dx \\
\Rightarrow\ & W &&= PA(x_o - x_f) \qquad (\text{donde } x_f < x_o) \\
\Rightarrow\ & 0{,}105\ [J] &&= P \cdot 10^{-3}[m]^2 \cdot 10^{-3}\ [m] \\
\Rightarrow\ & P &&= 104\,750\ [Pas] = 1{,}033\ [atm] = 785{,}689\ [mmHg].
\end{aligned}$$

Problema 5 (eliminado)

Problema 6
De la ecuación de compresión obtenemos

$$\begin{aligned}
& \ln \tfrac{V}{V_o} &&= -A(P - P_o) \\
\Rightarrow\ & \ln V - \ln V_o &&= -AP + AP_o \\
\Rightarrow\ & \tfrac{1}{V}\ dV &&= -A\ dP \\
\Rightarrow\ & dV &&= -AV\ dP.
\end{aligned}$$

Esta última ecuación nos dice como cambia diferencialmente el volúmen cuando cambiamos la presión. Pero para un líquido, en un proceso de compresión, su volúmen prácticamente no cambia, luego podemos considerar que el volúmen se va manteniendo constante a medida que aumentamos la presión, con lo cual,

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{V_o}^{V_f} P \; dV \\
&= \int_{P_o}^{P_f} P \; (-AV \; dP) \\
&= \frac{1}{2} AV(P_o^2 - P_f^2).
\end{aligned}
$$