Termodinámica

Corrección de la Tarea 2

Universidad del Chile, Facultad de Ciencias,
Departamento de Física, Santiago, Chile

Ayudante: Felipe González
Profesor: Rodrigo Ferrer

Última corrección

21 de agosto de 2007

Problema 1

a) La ecuación fundamental entrópica del gas ideal monoatómico está dada por

$$S(U,V,N) = \frac{N}{N_o}S_o + NR\ln\left[\left(\frac{U}{U_o}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{V}{V_o}\right)\left(\frac{N}{N_o}\right)^{-\frac{5}{2}}\right],$$

Aplicamos $\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \frac{1}{T}$ para obtener la temperatura. Al derivar, se consigue

$$T = \frac{2}{3}\frac{U}{NR}. \tag{1.1}$$

Usando el teorema de la función implícita, obtenemos

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} = -\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S,N} = -\frac{1}{T}(-P) = \frac{P}{T},$$

de donde podemos obtener P sólamente calculando $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N}$, ya que, gracias a (1.1), conocemos T. El resultado de este cálculo es

$$\frac{NR}{V} = \frac{P}{T} \Rightarrow P = \frac{2}{3}\frac{U}{V}. \tag{1.2}$$

Usando el teorema de la función implícita nuevamente, obtenemos

$$\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V} = -\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N}\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V} = -\frac{\mu}{T},$$

de donde podemos obtener μ sólamente calculando la derivada de la izquierda en la ecuación anterior, ya que, gracias a (1.1), conocemos T. El resultado de este cálculo es

$$\frac{S_o}{N_o} + R\ln\left[\left(\frac{U}{U_o}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{V}{V_o}\right)\left(\frac{N}{N_o}\right)^{-\frac{5}{2}}\right] - \frac{5}{2}R = -\frac{\mu}{T},$$

donde, reemplazando T, obtenemos $\mu = \mu(U,V,N)$:

$$\mu = \frac{2U}{3NR}\left(\frac{5}{2}R - \frac{S_o}{N_o} - R\ln\left[\left(\frac{U}{U_o}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{V}{V_o}\right)\left(\frac{N}{N_o}\right)^{-\frac{5}{2}}\right]\right). \tag{1.3}$$

b) De (1.1) y (1.2) tenemos, respectivamente

$$U = \frac{3}{2}NRT; \qquad U = \frac{3}{2}PV$$

Por lo tanto

$$U = \frac{3}{2}NRT = \frac{3}{2}PV \tag{1.4}$$

Problema 2
Reemplazando las ecuaciones obtenidas por los científicos en la relación de Euler,

$$u = Ts - Pv + \mu$$

obtenemos inmediatamente

$$u = \frac{s^2\theta}{R} - R\theta\left(\frac{v}{v_o}\right)^2 \tag{2.1}$$

Problema 3
Como el proceso en el sistema de la derecha es adiabático,

$$\begin{aligned}
& PV^{\gamma} &&= cte \\
\Rightarrow\quad & PV^{\frac{5}{3}} &&= P_oV_o^{\frac{5}{3}} = 54^{\frac{5}{3}} \\
\Rightarrow\quad & V &&= \left(\frac{54^{\frac{5}{3}}}{P}\right)^{\frac{3}{5}} \\
\Rightarrow\quad & dV &&= \frac{3}{5}\left(\frac{54^{\frac{5}{3}}}{P}\right)^{-\frac{2}{5}}\left(-\frac{54^{\frac{5}{3}}}{P^2}\right) dP \\
\Rightarrow\quad & dV &&= -\frac{3}{5}\,54\,\frac{1}{P^{\frac{8}{5}}}\,dP
\end{aligned}$$

Luego, el trabajo realizado sobre el subsistema 2 está dado por

$$\begin{aligned}
\Delta W^{(2)} &= -\int_{P_i}^{P_f} P\,dV \\
&= -\int_{1}^{7{,}59} P\left(-\frac{3}{5}\,54\,\frac{1}{P^{\frac{8}{5}}}\right) dP \\
&= \frac{3}{5}\,54\int_{1}^{7{,}59} P^{-\frac{3}{5}}\,dP \\
&= \frac{3}{5}\,54\left(\frac{5}{2}P^{\frac{2}{5}}\right)\Big|_{1}^{7{,}59} \\
&= 101{,}21\,[lt\cdot atm].
\end{aligned}$$

La cantidad de moles N que hay en el primer compartimento (que en este caso resulta ser la misma cantidad que en el segundo), está dada por las condiciones iniciales:

$$
\begin{array}{rcl}
P_i^{(1)}V_i^{(1)} & = & NRT_i^{(1)} \\
\Rightarrow \quad N & = & \dfrac{P_i^{(1)}V_i^{(1)}}{RT_i^{(1)}} \\
\Rightarrow \quad N & = & \dfrac{1 \cdot 54 \cdot \, [lt \cdot atm]}{8{,}3143 \left[\frac{J}{mol\,^oK}\right] \cdot 273^oK} \\
\Rightarrow \quad N & = & \dfrac{1 \cdot 54 \cdot 101{,}3\,[J]}{8{,}3143 \left[\frac{J}{mol\,^oK}\right] \cdot 273^oK} \\
\Rightarrow \quad N & = & 2{,}41\,[mol]
\end{array}
$$

Ahora, el hecho de que en en subsistema de la derecha el proceso fuera adiabático nos dice que

$$
\begin{array}{rcl}
dU & = & đQ + dW \\
\Rightarrow \quad \Delta U & = & \Delta W \\
\Rightarrow \quad \frac{3}{2}NR\Delta T & = & \Delta W \\
\Rightarrow \quad T_f^{(2)} - T_i^{(2)} & = & \dfrac{1}{\frac{3}{2}NR}\Delta W \\
\Rightarrow \quad T_f^{(2)} & = & T_i^{(2)} + \dfrac{\Delta W}{\frac{3}{2}NR}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
T_f^{(2)} & = & 273^oK + \dfrac{101{,}21 \cdot 101{,}3\,[J]}{\frac{3}{2} \cdot 2{,}41\,[mol] \cdot 8{,}3143\,\left[\frac{J}{mol\,^oK}\right]} \\
& = & 614{,}11\,^oK.
\end{array}
$$

Además,

$$
\begin{array}{rcl}
P_f^{(2)}V_f^{(2)} & = & NRT_f^{(2)} \\
\Rightarrow \quad V_f^{(2)} & = & \dfrac{NRT_f^{(2)}}{P_f^{(2)}} \\
& = & \dfrac{2{,}41 \cdot (8{,}3143 \cdot 101{,}3^{-1}) \cdot 614{,}11}{7{,}59}[lt] \\
& = & 16\,[lt].
\end{array}
$$

Luego

$$
\begin{array}{rcl}
T_f^{(1)} & = & \dfrac{P_f^{(1)}V_f^{(1)}}{NR} \\
& = & \dfrac{P_f^{(1)}(V_{tot} - V_f^{(2)})}{NR} \\
& = & \dfrac{7{,}59\,(108 - 16)}{2{,}41 \cdot 8{,}3143 \cdot 101{,}3^{-1}}\,^oK \\
& = & 3530{,}17\,^oK
\end{array}
$$