



TERMODINÁMICA

Corrección de la Tarea 4

Universidad del Chile, Facultad de Ciencias,
Departamento de Física, Santiago, Chile

Ayudante: FELIPE GONZÁLEZ
Profesor: RODRIGO FERRER

Última corrección
6 de septiembre de 2007

Problema 1

Se afirma que, para este tipo de sistemas,

$$C_V = \frac{k}{T}, \quad (1.1)$$

donde k es una constante.

a) Calculemos, según se pide, $U(T)$:

$$\begin{aligned} dQ &= dU - dW \\ &= \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV \right] + P dV \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left[P + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \right] dV. \end{aligned}$$

Como el volumen es constante, el segundo término es cero. Entonces

$$\frac{dQ}{dT} = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = C_V.$$

Luego

$$\begin{aligned} U(T) &= \int C_V dT \\ &= \int \frac{k}{T} dT \\ &= k \ln(T) \\ &= (C_V T) \ln(T). \end{aligned}$$

Finalmente

$$\boxed{U(T) = C_V \ln(T^T)}. \quad (1.2)$$

Para un cambio en la energía, se tiene

$$\Delta U = C_V \ln \left(\frac{T_f^{T_f}}{T_0^{T_0}} \right) \quad \text{o bien} \quad \Delta U = k \ln \left(\frac{T_f}{T_0} \right). \quad (1.3)$$

b) Se tienen dos sistemas en contacto. Como la energía es ecuación fundamental, es aditiva. Luego

$$\begin{aligned}
 U &= U^{(1)} + U^{(2)} \\
 &= C_{V_2} \ln(T_1^{T_1}) + C_{V_1} \ln(T_2^{T_2}) \\
 &= \frac{k_1}{T_1} \ln(T_1^{T_1}) + \frac{k_2}{T_2} \ln(T_2^{T_2}) \\
 &= k_1 \ln(T_1) + k_2 \ln(T_2) \\
 &= \ln(T_1^{k_1}) + \ln(T_2^{k_2}) \\
 &= \ln(T_1^{k_1} T_2^{k_2}).
 \end{aligned}$$

La energía final debe ser la misma, luego

$$U_i = U_f \quad \Rightarrow \quad \ln(T_1^{k_1} T_2^{k_2}) = \ln(T_f^{k_1} T_f^{k_2}),$$

por lo tanto

$$T_f = \left(T_1^{k_1} T_2^{k_2} \right)^{\frac{1}{k_1 + k_2}}. \tag{1.4}$$

Si $k_1 = k_2$, se tiene $T_f = \sqrt{T_1 T_2}$.

Problema 2

2.1. Ciclo de Otto

En el ciclo de Otto ocurren compresiones y expansiones como muestra la figura 1.

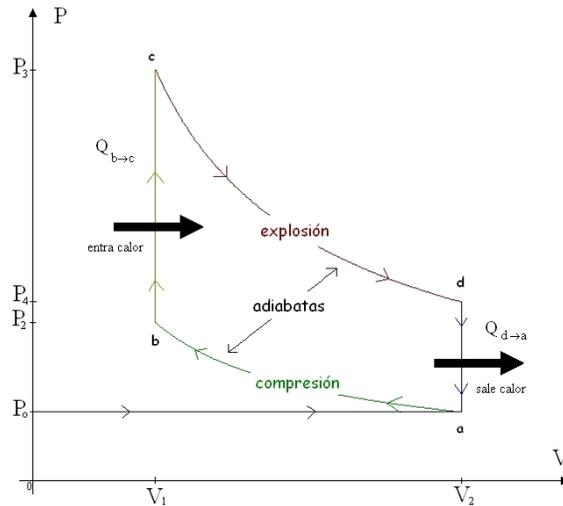


Figura 1: Ciclo de Otto: Presión vs. Volumen.

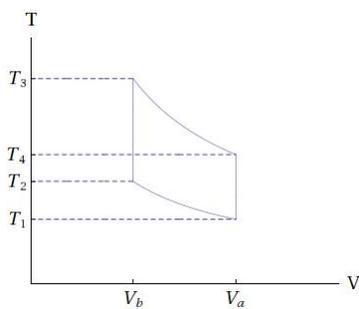


Figura 2: Ciclo de Carnot: T vs. V.

Calculemos el rendimiento:

$$\eta = \frac{Q_{b \rightarrow c} + Q_{d \rightarrow a}}{Q_{b \rightarrow c}}.$$

$$\begin{aligned} Q_{b \rightarrow c} &= C_v \int_{T_b}^{T_c} dT \\ &= C_v(T_c - T_b) \end{aligned}$$

El gas es ideal, luego $T = \frac{PV}{NR}$. Con esto,

$$\left\{ \begin{array}{l} T_c = \frac{P_3 V_1}{NR} \\ T_b = \frac{P_2 V_1}{NR} \end{array} \right. \Rightarrow T_c > T_b$$

Esto nos dice que $Q_{b \rightarrow c} > 0$, es decir, entra calor al gas.

$$\begin{aligned} Q_{d \rightarrow a} &= C_v \int_{T_d}^{T_a} dT \\ &= C_v(T_a - T_d) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_a = \frac{P_o V_2}{NR} \\ T_d = \frac{P_4 V_2}{NR} \end{array} \right. \Rightarrow T_d > T_a$$

Esto nos dice que $Q_{b \rightarrow c} < 0$, es decir, sale calor del gas. Con esto, el rendimiento queda

$$\eta = 1 + \frac{Q_{d \rightarrow a}}{Q_{b \rightarrow c}} = 1 + \frac{C_v(T_a - T_d)}{C_v(T_c - T_b)}.$$

Pero $T_b V_1^{\gamma-1} = T_a V_2^{\gamma-1}$ y $T_c V_1^{\gamma-1} = T_d V_2^{\gamma-1}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} (T_b - T_c) V_1^{\gamma-1} &= (T_a - T_d) V_2^{\gamma-1} \\ \Rightarrow \frac{T_a - T_d}{T_c - T_b} &= -\frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}} \\ \Rightarrow \eta &= 1 - \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}} \\ \Rightarrow \eta &= 1 - \frac{1}{\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}} \quad (2.1)$$

donde r es la “razón de compresión”.

2.2. Ciclo de Carnot

Este ciclo es bastante importante, por lo que detallaré el desarrollo más de lo necesario. En el ciclo de Carnot, se tiene el siguiente diagrama.

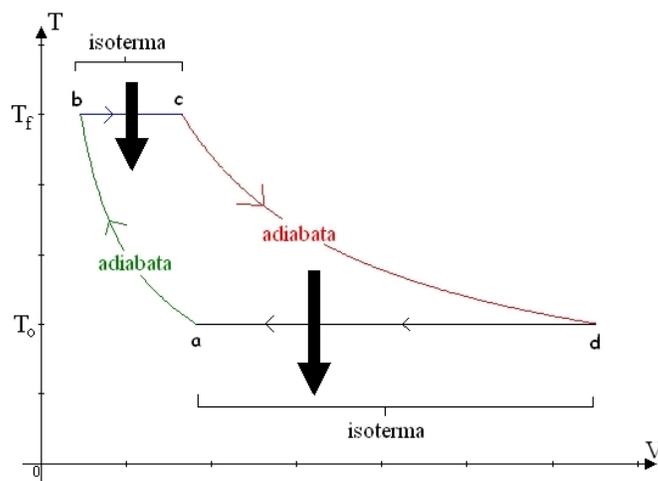


Figura 3: Ciclo de Carnot.

- Proceso $a \rightarrow b$: Adiabata reversible

El gas se comprime dándole energía en forma de trabajo mecánico. La energía interna aumenta. Esto implica que la temperatura aumenta:

$$\begin{aligned}
T dS &= C_v dT + P dV \\
\Rightarrow 0 &= C_v dT + P dV \\
\Rightarrow C_v dT &= -\frac{NRT}{V} dV \\
\Rightarrow \frac{1}{NR} \int_{T_o}^{T_f} C_v \frac{dT}{T} &= \ln \frac{V_b}{V_a} > 0
\end{aligned}$$

- Proceso $b \rightarrow c$: Isoterma reversible

El gas se expande a temperatura constante. Muy lentamente se le da calor al sistema y se le quita energía en forma de trabajo:

$$\begin{aligned}
\delta Q &= C_v dT + P dV \\
\Rightarrow Q_{b \rightarrow c} &= \int_{V_b}^{V_c} NRT_f \frac{dV}{V} \\
&= NRT_f \ln \frac{V_c}{V_b} > 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Esto significa que el gas absorbe calor ($Q_f > Q_i$).

- Proceso $c \rightarrow d$: Adiabata reversible

El gas se expande realizando trabajo solamente. Su energía interna disminuye, por lo que la temperatura disminuye:

$$\begin{aligned}
0 &= C_v dT + P dV \\
\Rightarrow dW &= C_v dT = -\frac{NRT}{V} dV \\
\Rightarrow \frac{1}{NR} \int_{T_f}^{T_o} C_v \frac{dT}{T} &= -\int_{V_c}^{V_d} \frac{dV}{V} \\
&= -\ln \frac{V_d}{V_c} \\
&= \ln \frac{V_c}{V_d} < 0.
\end{aligned}$$

Esto significa que el gas realiza trabajo.

- Proceso $d \rightarrow a$: Isoterma reversible

El gas se comprime a temperatura constante T_o . Se le extrae calor al sistema y se le da energía en forma de trabajo:

$$\begin{aligned}
\delta Q &= P dV \\
\Rightarrow Q_{d \rightarrow a} &= NRT_o \int_{V_d}^{V_a} \frac{dV}{V} \\
&= NRT_o \ln \frac{V_a}{V_d} < 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Hemos completado un ciclo en el cual hubo un intercambio de energías en forma de calor y en forma de trabajo mecánico.

Tenemos:

$$\frac{Q_{b \rightarrow a}}{Q_{d \rightarrow a}} = \frac{NRT \ln \frac{V_c}{V_b}}{NRT \ln \frac{V_a}{V_d}}.$$

Además

$$\begin{cases} T_o V_a^{\gamma-1} = T_f V_b^{\gamma-1} \\ T_o V_d^{\gamma-1} = T_f V_c^{\gamma-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{V_a}{V_d} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_b}{V_c} \right)^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{V_a}{V_b} = \ln \frac{V_d}{V_c}$$

$$\therefore \frac{Q_{b \rightarrow c}}{Q_{d \rightarrow a}} = -\frac{T_f}{T_o}.$$

De esta última ecuación tenemos

$$T_f = -T_o \frac{Q_{b \rightarrow c}}{Q_{d \rightarrow a}} > 0$$

y

$$\frac{Q_{b \rightarrow c}}{T_f} + \frac{Q_{d \rightarrow a}}{T_o} = 0 \Rightarrow \frac{T_f \cdot S_{b \rightarrow c}}{T_f} + \frac{T_o \cdot S_{d \rightarrow a}}{T_o} = \Delta S = 0.$$

Nota:

$$\frac{|Q_{b \rightarrow c}|}{|Q_{d \rightarrow a}|} = \frac{T_f}{T_o} > 1$$

$$\Rightarrow |Q_{b \rightarrow c}| > |Q_{d \rightarrow a}|.$$

La energía es una función de estado, por lo tanto, vuelve a ser la misma que cuando se inició el ciclo en el estado a . Esto implica que el sistema debe botar energía; y lo hace realizando trabajo neto. Notamos además que entra más calor del que sale.

El rendimiento está dado por

$$\eta \equiv \frac{\text{FLUJO NETO DE CALOR}}{\text{CALOR RECIBIDO}}. \tag{2.4}$$

En nuestro caso,

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{Q}{Q_{b \rightarrow c}} \\ &= \frac{Q_{b \rightarrow c} + Q_{d \rightarrow a}}{Q_{b \rightarrow c}} \\ &= 1 + \frac{Q_{d \rightarrow a}}{Q_{b \rightarrow c}}. \end{aligned}$$

Luego

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_o}{T_f}} \quad (2.5)$$

Si tomamos el ciclo de Carnot en el sentido contrario, estamos sacando calor de un cuerpo a temperatura T_o y dándole trabajo al gas que, a su vez, está sacando calor a un cuerpo a temperatura T_f . Por lo tanto ¡TENEMOS UN REFRIGERADOR!

En este sentido, el ciclo de Carnot es, sin “antirefrigerador”, una bomba de calor (estufa). En esta bomba de calor, definimos el rendimiento como

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{Q_{\text{NETO}}}{Q_{\text{ABSORBIDO}}} \\ &= \frac{-W_{\text{NETO}}}{Q_{\text{ABSORBIDO}}} \\ &= \frac{Q_{\text{ABSORBIDO}} + Q_{\text{BOTADO}}}{Q_{\text{ABSORBIDO}}} \\ &= 1 + \frac{Q_{\text{BOTADO}}}{Q_{\text{ABSORBIDO}}}, \end{aligned}$$

donde η será menor o igual a 1, garantizado. Lo que importará en el refrigerador, es la razón entre el calor absorbido y el trabajo entregado al gas.

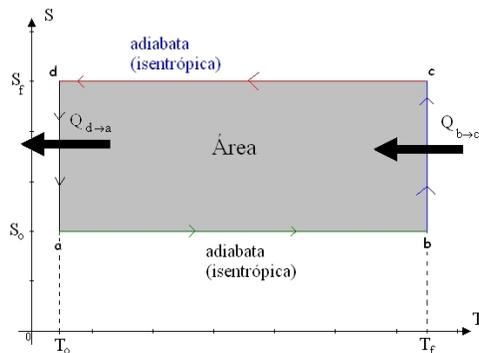


Figura 4: Ciclo de Carnot: Entropía vs. Temperatura.

En la figura 4 podemos ver que el flujo neto de calor también viene dado por

$$\begin{aligned} Q &= Q_{b \to c} + Q_{d \to a} \\ &= T_f(S_f - S_o) + T_o(S_o - S_f) \\ &= (T_f - T_o)(S_f - S_o) \\ &= \text{ÁREA} \end{aligned}$$

Rendimiento:

$$\eta = \frac{Q}{Q_{b \to c}} = \frac{\text{ÁREA}}{\text{ÁREA}_1} = \frac{(T_f - T_o)(S_f - S_o)}{T_f(S_f - S_o)} \quad (2.6)$$

Podemos ver la situación anterior como en el siguiente gráfico:

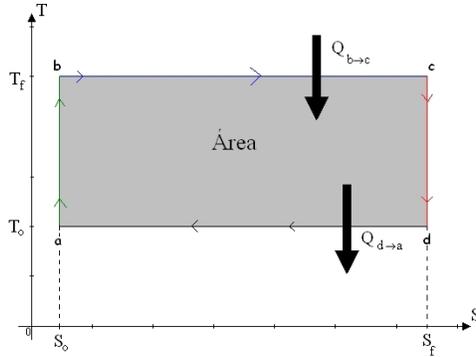


Figura 5: Ciclo de Carnot: Temperatura vs. Entropía.

En general, además del gas ideal, un gas, un líquido o un sólido pueden ser sometidos a un ciclo de Carnot, cuyas etapas resumimos:

1. Compresión isentrópica a $S = S_0$
2. Expansión isotérmica a temperatura T_f
3. Expansión isentrópica a $S = S_f$
4. Compresión isotérmica a temperatura T_0

En la figura 4, el proceso $b \rightarrow c$ representa una fuente caliente o *reservoir* de energía; mientras que el proceso $d \rightarrow a$ representa un *reservoir* de fuente fría. El sistema “bota” trabajo: $-W = Q_h + Q_c$. Esto implica que **no todo el calor entregado se puede transformar en trabajo**. Este es el **SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA**.

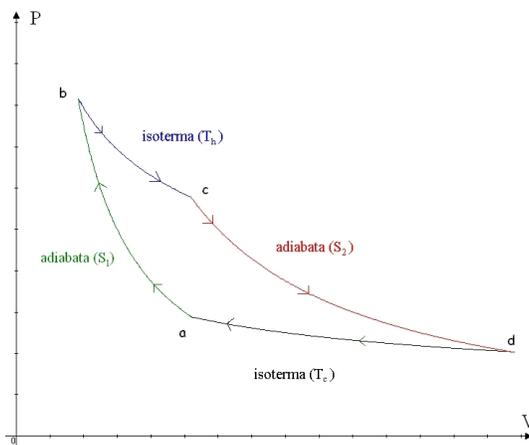


Figura 6: Ciclo de Carnot: Presión vs. Volumen.

Problema 3

Como $dU = -\dot{d}Q_{RHS} - \dot{d}W_{RHS} = \dot{d}Q + \dot{d}Q$, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \dot{d}W_{RHS} &= -\dot{d}Q - \dot{d}Q_{RHS} - \dot{d}W \\
 &= -T dS + T_{RHS} dS - \dot{d}W \\
 &= (T - T_{RHS})(-dS) - \dot{d}W \\
 &= (1 - T_{RHS}) \left(-\frac{\dot{d}Q}{T} \right) + P dV \\
 &= \left(1 - \frac{T_{RHS}}{T} \right) (\dot{d}Q) + P dV \\
 &= \left(1 - \frac{T_{RHS}}{PV} NR \right) (\dot{d}Q) + \frac{B}{V^2} dV \\
 &= \left(1 - \frac{T_{RHS}}{B} NRV \right) (-\dot{d}Q) + \frac{B}{V^2} dV.
 \end{aligned}$$

Para poder continuar, necesitamos saber cuánto es $\dot{d}Q$. Para ello, usamos la conservación de la energía, de donde obtenemos

$$\begin{aligned}
 \dot{d}Q &= dU + P dV \\
 &= \frac{3}{2} P dV + \frac{3}{2} V dP + P dV \\
 &= \frac{3}{2} \frac{B}{V^2} dV + \frac{3}{2} V \left(-\frac{2B}{V^3} dV \right) + \frac{B}{V^2} dV \\
 &= -\frac{B}{2V^2} dV.
 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
 \Delta W &= \int_{V_o}^{V_2} \left[\left(1 - \frac{T_{RHS}}{B} NRV \right) \frac{B}{2V^2} + \frac{B}{V^2} \right] dV \\
 &= \int_{V_o}^{V_2} \left(\frac{3}{2} \frac{B}{V^2} - \frac{T_{RHS}}{2V} NR \right) dV \\
 &= \frac{3}{2} B(-1) \left(\frac{B}{V_i} - \frac{1}{V_2} \right) - \frac{T_{RHS}}{2} NR \ln \left(\frac{1}{B} \right) \\
 &= \frac{T_{RHS}}{2} NR \ln(B) - \frac{3}{2} \frac{B}{V_i} (B - 1) \\
 &= \frac{1}{2} T_{RHS} NR \ln(B^{\frac{1}{2}}) - \frac{3}{2} P_i V_i (B - 1).
 \end{aligned}$$