Termodinámica

Corrección de la Tarea 5

Universidad del Chile, Facultad de Ciencias,
Departamento de Física, Santiago, Chile

Ayudante: Felipe González
Profesor: Rodrigo Ferrer

Última corrección
4 de octubre de 2007

Problema 1

La barra es llevada a través de los procesos que se indican en la figura 1. Como la barra es homogénea y conductora, la temperatura en función del largo será un polinomio de primer grado, tal que $T(0) = T_c$ y $T(L) = T_h$. La función que cumple esto es $T : [0, L] \to \mathbb{R}$ tal que

$$T(x) = \left(\frac{T_h - T_c}{L} \right) x + T_c. \tag{1.1}$$

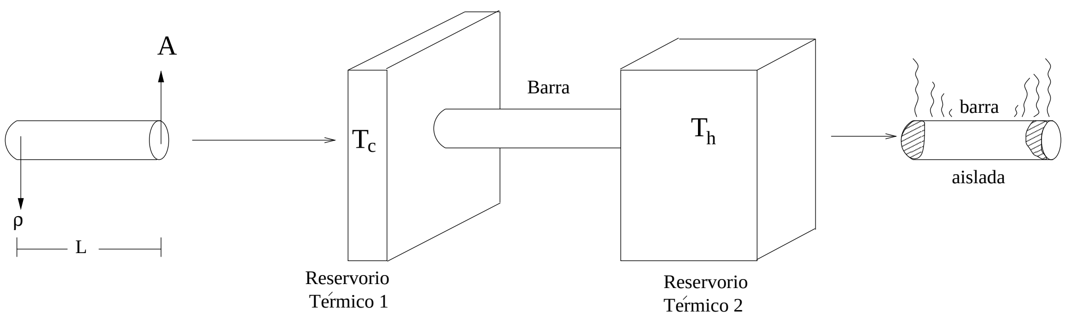


Figura 1: Barra Conductora.

Sabemos que $dC_P = A\rho c_P \; dx$, donde c_P es constante para una temperatura constante. Luego

$$C_P = \int_0^L A\rho c_P \; dx. \tag{1.2}$$

Pero

$$C_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \qquad \Rightarrow \qquad dS = \frac{C_P}{T(x)} \; dT,$$

donde $T(x)$ explicita que la temperatura depende de la posición x. Usando (1.2), tenemos

$$
\begin{aligned}
\Delta S &= \int_{T_0}^{T_f} \frac{C_P(x)}{T(x)}\ dT_{(x)} \\
&= \int_{T(x)}^{T_f} \int_0^L \left(\frac{A\rho c_P}{T(x)}\ dx \right) dT_{(x)} \\
&= \int_0^L \int_{T(x)}^{T_f} \left(\frac{A\rho c_P}{T}\ dT \right) dx \\
&= \int_0^L A\rho c_P \left(\int_{T(x)}^{T_f} \frac{dT}{T} \right)\ dx \\
&= A\rho c_P \int_0^L \ln(T_f)\ dx - A\rho c_p \int_0^L \ln(T(x))\ dx \\
&= A\rho c_P L \ln(T_f) - A\rho c_P \int_0^L \ln\left(\frac{T_h - T_c}{L} x + T_c \right)\ dx.
\end{aligned}
$$

En la segunda igualdad, intercambiamos las integrales para hacer más secilla la dependencia entre T y x. Haciendo la sustitución $u = \left(\frac{T_h - T_c}{L} + T_c\right) x + T_c$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\Delta S &= A\rho c_P L \ln(T_f) - A\rho c_P \int_{T_c}^{T_h} \ln(u) \left(\frac{L}{T_h - T_c} \right)\ du \\
&= A\rho c_p L \ln(T_f) + \frac{A\rho c_p L}{T_h - T_c} \Big(u - u \ln u \Big)\Big|_{T_c}^{T_h} \\
&= A\rho c_p L \ln(T_f) + \frac{A\rho c_p L}{T_h - T_c} (T_h - T_h \ln(T_h) - T_c + T_c \ln(T_c)) \\
&= A\rho c_p L \ln(T_f) + \frac{A\rho c_p L}{T_h - T_c} (T_h - T_c + T_c \ln(T_c) - T_h \ln(T_h)) \\
&= A\rho c_P L \left(\ln T_f + 1 + \frac{T_c}{T_h - T_c} \ln(T_c) - \frac{T_h}{T_h - T_c} \ln T_h \right).
\end{aligned}
$$

Pero $A\rho c_p L = C_P$ y $\frac{T_h + T_c}{2} = T_f$, por lo que

$$
\boxed{\Delta S = C_P \left(1 + \ln\left(\frac{T_h + T_c}{2} \right) + \frac{T_c}{T_h - T_c} \ln(T_c) - \frac{T_h}{T_h - T_c} \ln T_h \right).} \tag{1.3}
$$

Problema 2

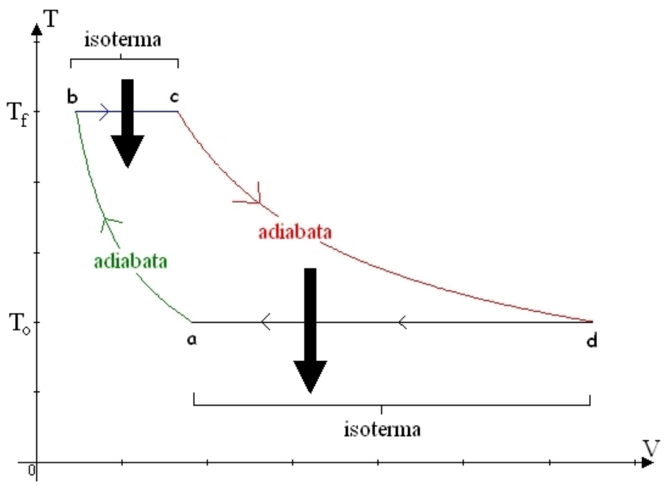


Figura 2: Ciclo de Carnot.

Este ciclo se mueve entre cuatro volúmenes: V_a, V_b, V_c y V_d. Redefinimos la temperatura mínima T_m como T_0 para usar la misma notación que se presenta en el gráfico. La razón de compresión total está dada por

$$\mathscr{R} = \frac{V_d}{V_b}. \tag{2.1}$$

r es la razón de compresión en una compresión isentrópica. Como en un proceso isentrópico $dS = 0$, tenemos $đQ = 0$. Luego, la compresión isentrópica está en el proceso adiabático $(V_a, T_0) \to (V_b, T_f)$, ya que $V_b < V_a$. Luego

$$r = \frac{V_a}{V_b}. \tag{2.2}$$

El intercambio de calor está en los procesos $b \to c$ y $d \to a$. En un proceso adiabático, $đQ = 0$, luego,

$$0 = C_P \; dT - V \; dP,$$

y como en el ciclo de Carnot se realiza sobre un gas ideal, tenemos

$$C_P \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = NR \int_{P_i}^{P_f} \frac{dP}{P},$$

de donde, usando las propiedades de ln, obtenemos

$$\frac{T_f}{T_i} = \left(\frac{P_f}{P_i}\right)^{\frac{NR}{C_P}}.$$

Dado que $C_P = NR + C_V$ y $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$, reemplazando $P = \frac{NRT}{V}$, tenemos la ecuación de la adiabata

$$TV^{\gamma - 1} = const. \tag{2.3}$$

El trabajo lo obtenemos de la relación $đQ = C_V \; dT - đW$, de donde obtenemos

$$\Delta W_{a \to b} = C_V (T_f - T_0). \tag{2.4}$$

En el proceso $b \to c$ tenemos temperatura constante. Luego

$$\Delta W_{b\to c} = -\int_{V_b}^{V_c} P\ dV,$$

de donde obtenemos

$$\Delta W_{b\to c} = -NRT_f \ln\left(\frac{V_c}{V_b}\right). \tag{2.5}$$

En $c \to d$ tenemos otra adiabata. Luego

$$\Delta W_{c\to d} = C_V(T_0 - T_f). \tag{2.6}$$

En el proceso $d \to a$, la temperatura es constante, por lo que

$$\Delta W_{d\to a} = -NRTT_0 \ln\left(\frac{V_a}{V_d}\right). \tag{2.7}$$

Sumando los trabajos parciales, obtenemos el trabajo total, W:

$$\begin{aligned}
\Delta W &= \Delta W_{a\to b} + \Delta W_{b\to c} + \Delta W_{c\to d} + \Delta W_{d\to a} \\
&= C_V(T_f - T_0) - NRT_f \ln\left(\frac{V_c}{V_b}\right) + C_V(T_0 - T_f) - NRT_0 \ln\left(\frac{V_a}{V_d}\right) \\
&= NR\left[T_f \ln\left(\frac{V_b}{V_c}\right) + T_0\left(\frac{V_d}{V_a}\right)\right].
\end{aligned} \tag{2.8}$$

De la ecuación (2.3) tenemos $T_f V_b^{\gamma-1} = T_0 V_a^{\gamma-1}$ y $T_f V_c^{\gamma-1} = T_0 V_d^{\gamma-1}$. Luego

$$T_f = T_0\left(\frac{V_a}{V_b}\right)^{\gamma-1} \qquad \text{y} \qquad T_f = T_0\left(\frac{V_d}{V_c}\right)^{\gamma-1}. \tag{2.9}$$

Igualando estas dos últimas ecuaciones, concluímos que

$$\frac{V_a}{V_c} = \frac{V_a}{V_d}, \tag{2.10}$$

con lo que el trabajo total, deducido en (2.8) puede ser expresado como

$$\begin{aligned}
\Delta W &= NR\left[T_f \ln\left(\frac{V_b}{V_c}\right) + T_0 \ln\left(\frac{V_d}{V_a}\right)\right] \\
&= NR\left[\left(T_0\left(\frac{V_a}{V_b}\right)^{\gamma-1}\right)\ln\left(\frac{V_b}{V_c}\right) + T_0 \ln\left(\frac{V_d}{V_a}\right)\right] \\
&= NRT_0\left[\left(\frac{V_a}{V_b}\right)^{\gamma-1}\ln\left(\frac{V_b}{V_c}\right) + \ln\left(\frac{V_d}{V_a}\right)\right] \\
&= NRT_0\left[\ln\left(\frac{V_d}{V_a}\right) - \left(\frac{V_a}{V_b}\right)^{\gamma-1}\ln\left(\frac{V_b}{V_c}\right)\right] \\
&= NRT_0 \ln\left(\frac{V_d}{V_a}\right)\left[1 - \left(\frac{V_a}{V_b}\right)\right].
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Recordemos que $\frac{V_a}{V_b} = r$ y $\frac{V_d}{V_b} = \mathscr{R}$, luego

$$\frac{V_d}{V_a} = \frac{\mathscr{R}}{r} \tag{2.12}$$

Reemplazando última ecuación en (2.11) obtenemos la ecuación del trabajo en función de las razones de compresión:

$$\boxed{\Delta W = NRT_0 \ln\left(\frac{\mathscr{R}}{r}\right)\left[1 - r^{\gamma-1}\right].} \tag{2.13}$$

Como r es variable, tenemos que ΔW es una función que depende de r. Una primera observación, que es suficiente para concluír el ejercicio, es que para cualquier valor de γ (excepto 1, ya que ΔW sería cero), basta tomar r tendiendo a cero para lograr que $W(r)$ tienda a infinito, es decir

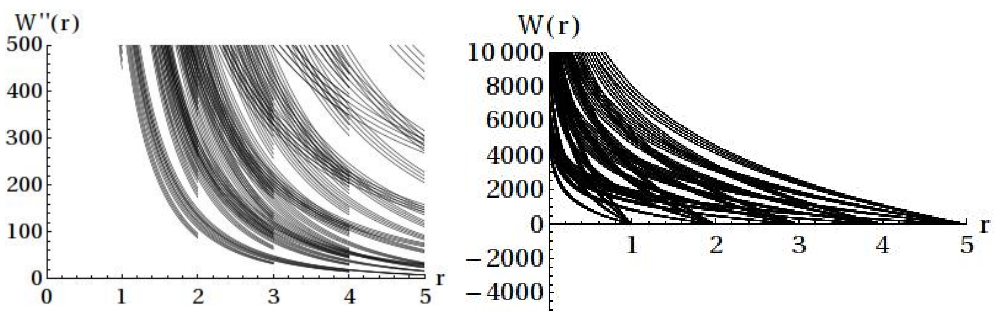
$$r = \frac{V_a}{V_b} \to 0 \qquad \Rightarrow \qquad W(r) \to \infty. \tag{2.14}$$

Un análisis detallado para encontrar el trabajo máximo es encontrar un r_0 tal que $\Delta W'(r_0) = 0$ y $\Delta W''(r_0) < 0$. Derivando, obtenemos

$$\Delta W'(r) = -\frac{NRT_0}{r}\left[1 - r^{\gamma-1}\left(1 - (\gamma-1)\ln\left(\frac{\mathscr{R}}{r}\right)\right)\right] \tag{2.15}$$

$$\Delta W''(r) = \frac{NRT_0}{r^2}\left[1 + r^{\gamma-1}\left((2\gamma-3) - (\gamma-1)(\gamma-2)\ln\left(\frac{\mathscr{R}}{r}\right)\right)\right] \tag{2.16}$$

Para no hacer un análisis matemático formal que nos permita deducir en qué intervalo $W''(r) < 0$ (ya que nos quitará mucho tiempo), haremos un análisis numérico: Tomamos $\gamma \in [1, 2]$, es decir, gases ideales, con pasos de 0,2 (6 valores de γ distintos); $\mathscr{R} \in [1, 5]$, con pasos de 1; $N \in [0, 2]$ con pasos de 0,5; y $T \in [270, 300]$ con pasos de 10. Esto nos permite obtener el diagrama de la figura 3(a), donde notamos que para cualquier combinación de estos valores, $W''(r)$ es siempre mayor que cero, es decir, no existe un máximo local.



(a) $W''(r)$ (b) $W(r)$

Figura 3: Funciones W para distintos parámetros, y su segunda derivada.

Las líneas verticales que se aprecian en la figura 3(a) se deben a que $r \in [0, \mathscr{R}]$, por lo que, para cada $\mathscr{R}$, se grafican líneas en ese intervalo.
Esto nos permite concluír, gracias al gráfico 3(b), que mientras más cerca de cero esté r, mayor es el trabajo que se puede extraer del sistema. Por lo tanto, una condición necesaria y suficiente es tomar $\lim\limits_{r\to 0}$.

Problema 3

La energía de los sistemas es

$$U_1 = CNT_1, \quad U_2 = CNT_2, \quad U_3 = CVT_3. \tag{3.1}$$

El diferencial de entropía es

$$dS = \frac{1}{T}\,dU + \frac{P}{T}\,dV - \frac{\mu}{T}\,dN,$$

el cual, al depender solamente de la temperatura, nos permite concluír que

$$dS = \frac{dU}{T}.$$

Para cada uno de los sistemas, indicados por los subíndices, tenemos

$$\begin{aligned} dS_1 &= \frac{CN}{T_1}\,dT_1, \\ dS_2 &= \frac{CN}{T_2}\,dT_2, \\ dS_3 &= \frac{CN}{T_3}\,dT_3. \end{aligned} \tag{3.2}$$

El trabajo máximo se obtiene cuando no hay un cambio en la entropía del sistema entero, es decir, $dS_{\text{TOTAL}} = \Delta S = 0$. Luego, como la entropía es aditiva, tenemos

$$dS_1 + dS_2 + dS_3 = 0,$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int \frac{CN}{T_2}\,dT_2 + \frac{CN}{T_2}\,dT_2 + \frac{CN}{T_3}\,dT_3 \\ &= \int CN\left(\frac{dT_1}{T_1} + \frac{dT_2}{T_2} + \frac{dT_3}{T_3}\right) \\ &= CN\left(\int_{T_{1i}}^{T_f} \frac{dT_1}{T_1} + \int_{T_{2i}}^{T_f} \frac{dT_2}{T_2} + \int_{T_{3i}}^{T_f} \frac{dT_3}{T_3}\right) \\ &= CN\left(\ln\left(\frac{T_f}{T_{1i}}\right) + \ln\left(\frac{T_f}{T_{2i}}\right) + \ln\left(\frac{T_f}{T_{3i}}\right)\right) \\ &= CN\ln\left(\frac{T_f^3}{T_{1i}T_{2i}T_{3i}}\right) = 0. \end{aligned}$$

Como ln es una función biyectiva, y $\ln(1) = 0$, entonces

$$\frac{T_f^3}{T_{1i}T_{2i}T_{3i}} = 1,$$

de donde, al despejar T_f, se obtiene

$$\boxed{T_f = \sqrt[3]{T_{1i}T_{2i}T_{3i}}} \tag{3.3}$$

reemplazando los valores dados, obtenemos $T_f = 246{,}62$.

Ahora bien, para obtener el trabajo máximo, necesitamos $dS = 0$, luego $đW = dU$. De aqui,

$$
\begin{aligned}
W_{max} &= CN\left(\int_{T_1}^{T_f} \; dT + \int_{T_2}^{T_f} \; dT + \int_{T_3}^{T_f} \; dT\right) \\
&= CN(3T_f - T_1 - T_2 - T_3) \\
&= -2101{,}4 \ J.
\end{aligned}
$$