Termodinámica

Corrección de la Tarea 6

Universidad del Chile, Facultad de Ciencias,
Departamento de Física, Santiago, Chile

Ayudante: Felipe González
Profesor: Rodrigo Ferrer

Última corrección

24 de octubre de 2007

Problema 1

a) Consideremos un cilindro de aire. Siendo ρ la densidad del aire, la presión en una altura determinada estará dada por

$$\begin{aligned}
dP &= \frac{dF}{A} \\
&= \frac{d(-Mg)}{A} \\
&= -\frac{g}{A}\, dM \\
&= -\frac{g}{A}\rho(y)\, dV \\
&= -g\rho(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Como la masa total es $(\rho V) = M = Nm$ (masa molar por cantidad de moles), de la ecuación $PV = Nk_BT$, tenemos

$$\begin{aligned}
P(y) &= \frac{1}{V}\frac{M}{m}k_BT \\
&= \frac{1}{V}\frac{k_BT}{m}(\rho(y)V) \\
&= \frac{k_BT}{m}\rho(y),
\end{aligned}$$

luego

$$\rho(y) = \frac{m}{k_BT}P(y).$$

Diferenciando esta ecuación y reemplazando dP, obtenido arriba,

$$d\rho = \left(\frac{m}{k_BT}\right) dP = \left(\frac{m}{k_BT}\right)(-g\rho\, dy),$$

de donde obtenemos

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\left(\frac{mg}{k_BT}\right) dy.$$

Al integrar esta ecuación, se obtiene

$$\rho(y) = \rho_0 \exp\left(-\frac{mgy}{k_BT}\right).$$

Como $dP = -g\rho(y)\,dy$, integramos para obtener

$$P = -g\int_0^y \rho_0 \exp\left(-\frac{mgy'}{k_BT}\right)\,dy' = -g\rho_0\left(-\frac{k_BT}{mg}\right)\exp\left(-\frac{mgy}{k_BT}\right) = \left(\frac{\rho_0 k_BT}{m}\right)\exp\left(-\frac{mgy}{k_BT}\right).$$

Evaluando en $y = 0$, obtenemos

$$P(0) \equiv P_0 = \frac{\rho_0 k_BT}{m},$$

con lo cual podemos expresar la presión como

$$P(y) = P_0 \exp\left(-\frac{mgy}{k_BT}\right).$$

Usamos nuevamente $PV = NRT$, tenemos

$$P(y) = \frac{N(y)}{V}k_BT = n(y)k_BT,$$

luego

$$P_0 \exp\left(-\frac{mgy}{k_bT}\right) = n(y)k_BT.$$

Evaluando en $y = 0$, tenemos

$$n(0) \equiv n_0 = \frac{P_0}{k_BT},$$

es decir

$$\boxed{n(y) = n_0 \exp\left(-\frac{mgy}{k_BT}\right)\ .} \tag{1.1}$$

b) Dado que $m = 28{,}9 \times 10^{-3}\left[\frac{kg}{mol}\right]$, y $k_B = 8{,}31\left[\frac{1}{mol}\right]$, tenemos

$$\frac{n(11000)}{n_0} = \exp\left(-1{,}28\right) = 0{,}27.$$

c) La integral del numerador vale $\left(\frac{n_0 k_BT}{mg}\right)\frac{k_BT}{mg}$, mientras que la denominador vale , la división vale $\left(\frac{n_0 k_BT}{mg}\right)$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{k_BT}{mg}\ .} \tag{1.2}$$

Numéricamente, $\bar{y} = 8{,}601\ [km]$.

Problema 2

Dado que $PV = Nk_BT$ y

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{A < w > t}{4V}\right),$$

tenemos

$$P(t) = P_0 \exp\left(-\frac{A < w > t}{4V}\right),$$

con $P_0 \equiv \frac{N_0 k_B T}{V}$. Calculemos $< w >$.

$$\begin{aligned}
< w > &= \frac{1}{N}\int_0^\infty w \frac{dN_w}{dw}\ dw \\
&= \frac{1}{N}\ \frac{4N}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2k_BT}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty w^3 e^{-\frac{1}{2}\frac{mw^2}{k_BT}}dw.
\end{aligned}$$

El problema se reduce a calcular la integral. Definiendo $\alpha \equiv \frac{1}{2}\frac{m}{k_BT}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty w^3 e^{-\frac{1}{2}\frac{mw^2}{k_BT}}dw &= \int_0^\infty w^3 e^{-\alpha w^2}dw \\
&= -\int_0^\infty w\ \frac{\partial}{\partial\alpha}e^{-\alpha w^2}dw \\
&= -\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\infty w\ e^{-\alpha w^2}dw \\
&= -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(-\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha w^2}\right)\Bigg|_0^\infty \\
&= -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{2\alpha^2} \\
&= \frac{2k_B^2T^2}{m^2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
< w > &= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2k_BT}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2k_B^2T^2}{m^2} \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\ \frac{m^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}\ k_B^{\frac{3}{2}}\ T^{\frac{3}{2}}}\frac{2k_B^2T^2}{m^2} \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\ \left(\frac{k_B\ T}{2\ m}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, la presión con la presión del recipiente en un tiempo t es

$$\boxed{P(t) = P_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}\frac{At}{4V}\right)\ .} \tag{2.1}$$