

Mecánica II

Guía 1a: Sólido rígido

Viernes 11 sept.† 2015

Tarea: Problemas MM. **Cap. 8:** 3 y 7. **Cap. 9:** 4, 7, 9, 32 ; **A-F, 10-28**

Entrega: lu. 21 sept.

En este tema, *Cuerpo rígido* hay una gran cantidad de ejercicios interesantes que se pueden resolver. El nivel de los que se exigirán en este curso está dado por los de los Apuntes M-M y Cap. 10 A-F.

Aquí va una lista adicional para que los vaya resolviendo a medida que se pasa la materia en clases. En general, son más simples que los de MM.

Calculos de momentos de inercia

1. Tres barras delgadas idénticas de longitud L y masa m se sueldan perpendiculares entre sí, como se indica en la figura 4. El arreglo se hace girar alrededor de un eje que pasa por el extremo de una barra y es paralelo a otra. Determine el momento de inercia de esta configuración.

R: $11mL^2/12$

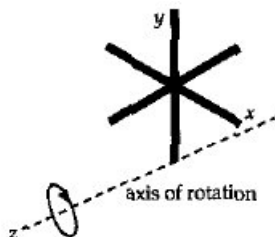


Figura 1:

2. Con el teorema de los ejes paralelos encuentre los momentos de inercia de:
 - a) Un triángulo rectángulo alrededor de un eje que pasa por el vértice que une la hipotenusa con uno de los catetos, como en la figura 5.
 - b) Un triángulo rectángulo alrededor de un eje fijo que pasa por uno de sus catetos (note que en este caso el triángulo es la mitad de un rectángulo).

R: Es $I = ML^2/2$ para ambos casos.

Energía rotacional

3. Tres pequeñas partículas están conectadas por medio de barras rígidas de masa despreciable a lo largo del eje y (figura 1). Si el sistema gira en torno al eje x a una rapidez angular de 2 rad/s , encuentre:
 - a) El momento de inercia alrededor del eje x y la energía cinética rotacional total.
 - b) La rapidez lineal de cada partícula y la energía cinética total evaluada a partir de $\sum \frac{1}{2}m_i v_i^2$

R: a) 92 kgm^2 , 184 J ; b) $v_1=6 \text{ m/s}$, $v_2=4 \text{ m/s}$, $v_3=8 \text{ m/s}$, 184 J .

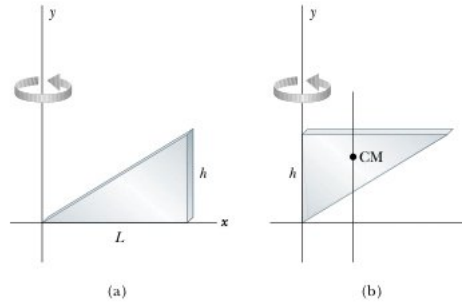


Figura 2:

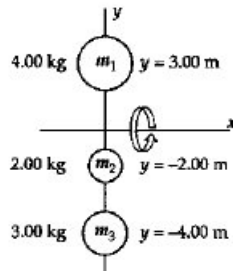


Figura 3:

4. Las cuatro partículas de la figura 2, están conectadas por medio de barras rígidas de masa despreciable. El origen está en el centro del rectángulo. Si el sistema gira en el plano xy en torno del eje z a una rapidez angular de 6 rad/s , calcule:

- El momento de inercia del sistema en torno al eje z .
- La energía rotacional del sistema.

R: a) 143 kgm^2 ; b) $2.57 \times 10^3 \text{ J}$.

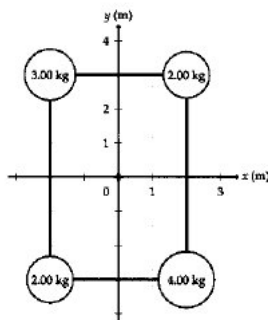


Figura 4:

5. Dos masas M y m están conectadas por medio de una barra rígida de longitud L y de masa despreciable, como se ve en la figura 3. Para un eje perpendicular a la barra, demuestre que el sistema tiene el momento de inercia mínimo cuando el eje pasa por el centro de masa. Demuestre que este momento de inercia es $I = \mu L^2$, donde $\mu = mM/(m + M)$.

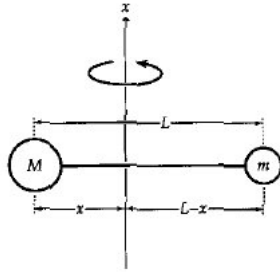


Figura 5:

Torque

6. Encuentre el torque neto sobre la rueda de la figura 6 alrededor de un eje que pase por O si $a = 10$ cm y $b = 25$ cm.

R: -3.55 Nm

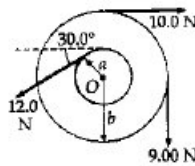


Figura 6:

7. Las llantas de un automóvil de 1500 kg tienen 0.6 m de diámetro y los coeficientes de fricción con el camino son $\mu_s = 0,8$ y $\mu_k = 0,6$. Suponiendo que el peso se distribuye de manera uniforme sobre las cuatro ruedas, calcule el torque máximo que puede ejercer el motor sobre el volante de tal forma que la rueda no gire. Si lo desea puede suponer que el carro está en reposo.

R: 882 Nm.

Relación entre el torque y aceleración angular

8. Un avión a escala, cuya masa es de 0.75 kg se ata a un alambre de manera que vuela en un círculo de 30 m de radio. El motor del avión brinda un empuje neto perpendicular al alambre de 0.8 N.

- Encuentre el torque que el empuje neto produce alrededor del centro del círculo.
- Encuentre la aceleración angular del avión cuando efectúa un vuelo nivelado.
- Encuentre la aceleración lineal del avión tangente a su trayectoria de vuelo.

R: a) 24 Nm ; b) 0.0356 rad/s^2 ; c) 1.07 m/s^2 .

9. Un bloque de masa $m_1 = 2$ kg y uno de masa $m_2 = 6$ kg se conectan por medio de una cuerda de masa despreciable sobre una polea que tiene la forma de un disco con radio $R = 0.25$ m y masa $M = 10$ kg. Asimismo, se deja que los bloques se muevan sobre un bloque fijo en forma de cuña con un ángulo de $\theta = 30^\circ$ como se muestra en la figura 7. El coeficiente de fricción cinética es de 0.36 para ambos bloques. Dibuje el diagrama de cuerpo libre de ambos bloques y el de la polea. Determine:

- a) La aceleración de los dos bloques.
 b) La tensión de la cuerda sobre ambos lados de la polea.

R: a) 0.309 m/s^2 ; b) $T_1 = 7.67 \text{ N}$, $T_2 = 9.22 \text{ N}$.

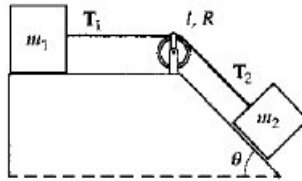


Figura 7:

Trabajo, energía y potencia en el movimiento rotacional

10. Un peso de 50 N se une al extremo libre de una cuerda de una polea de 0.25 m de radio y 3 kg de masa. La polea es un disco sólido, puede girar libremente en un plano vertical en torno del eje horizontal que pasa por su centro. El peso se libera a 6 m sobre el piso. Determine:

- a) La tensión en la cuerda, la aceleración de la masa y la rapidez a la cual el peso golpea el piso.
 b) La rapidez encontrada en el inciso a) empleando el principio de conservación de energía.

R: a) 11.4 N , 7.57 m/s^2 , 9.53 m/s hacia abajo ; b) 9.53 m/s .

11. Una masa de 15 kg y una de 10 kg están suspendidas por una polea que tiene un radio de 10 cm y una masa de 3 kg (figura 8). La cuerda tiene una masa despreciable y hace que la polea gire sin deslizarse. La polea gira sin fricción. Las masas empiezan a moverse desde el reposo cuando están separadas por una distancia de 3 m . Trate a la polea como un disco uniforme y determine la rapidez de las dos masas cuando pasan una frente a la otra.

R: 2.36 m/s .

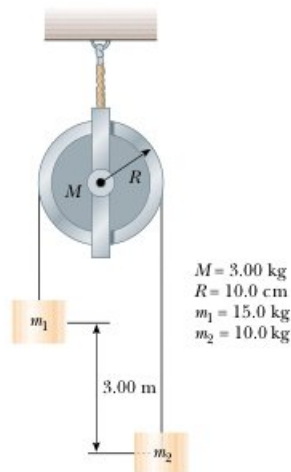


Figura 8:

12. Un disco sólido uniforme de radio R y masa M puede girar libremente sobre un pivote sin fricción que pasa por un punto sobre su borde (figura 9). Si el disco se libera desde el reposo en la posición mostrada por el círculo plomo.

- a) ¿Cuál es la rapidez de su centro de masa cuando el disco alcanza la posición indicada por el círculo punteado?
- b) ¿Cuál es la rapidez del punto más bajo sobre el disco en la posición del círculo punteado?
- c) Repita el inciso a) usando un aro uniforme.

R: a) $v_{cm} = 2\sqrt{Rg/3}$; b) $v_L = 4\sqrt{Rg/3}$; c) $v_{cm} = \sqrt{Rg}$.

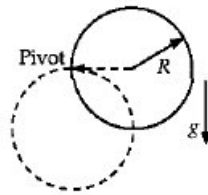


Figura 9:

13. Una larga barra uniforme de longitud L y masa M gira alrededor de un alfiler horizontal sin fricción que pasa por uno de sus extremos. La figura 10 muestra como se suelta la barra desde el reposo en una posición vertical. En el instante en que la barra está horizontal, encuentre:

- a) Su rapidez angular.
- b) La magnitud de su aceleración angular.
- c) Las componentes x , y de la aceleración de su centro de masa.
- d) Las componentes de la fuerza de reacción del pivote.

R: a) $\omega = \sqrt{3g/L}$; b) $\alpha = 3g/2L$; c) $\alpha_{cm} = (-\frac{3g}{2}, -\frac{3g}{4})$ c) $F = (-\frac{3Mg}{2}, \frac{Mg}{4})$.

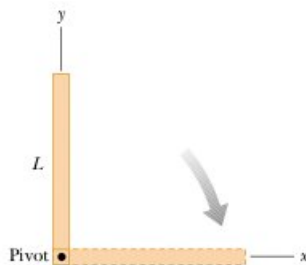


Figura 10:

Movimiento de rodamiento de un cuerpo rígido

14. Un cilindro de 10 kg de masa rueda sin deslizarse sobre una superficie horizontal. En el instante en que su centro de masa tiene una rapidez de 10 m/s, determine: a) la energía cinética traslacional de su centro de masa, b) la energía rotacional alrededor de su centro de masa, y c) su energía total.

R: a) 500 J; b) 250 J; c) 750 J

15. Determine: a) la aceleración del centro de masa de un disco sólido uniforme que rueda hacia abajo por un plano inclinado formando un ángulo θ con la horizontal. Compare esta aceleración con la de un aro uniforme. b) El coeficiente mínimo de fricción necesario para mantener el movimiento de rodamiento puro del disco.

R: a) $(2g \sin \theta)/3$ para el disco, más grande que $(g \sin \theta)/2$ para el caso del aro ; b) $(\tan \theta)/3$

16. Una lata que contiene sopa tiene una masa de 215 g, una altura de 10.8 cm y un diámetro de 6.38 cm. Se coloca en reposo sobre su lado en la parte alta de una pendiente de 3 m de largo que está a un ángulo de 25° con la horizontal, y entonces se suelta para que ruede en línea recta hacia abajo. Suponiendo que la energía se conserva calcule el momento de inercia de la lata si le toma 1.5 s alcanzar el fondo de la pendiente. ¿Cuál de los datos, si es que hay alguno, es innecesario para calcular la solución?

R: $1,21 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2$. La altura es innecesaria.

Momentum angular de la rotación de un objeto rígido y su conservación

17. Una partícula con 0.4 kg de masa se une a la marca de 100 cm de una regla métrica de 0.1 kg de masa. La regla gira sobre una mesa horizontal sin fricción a una rapidez angular de 4 rad/s. Calcule el momentum angular del sistema cuando la regla se articula en torno de un eje, a) perpendicular a la mesa y que pasa por la marca de 50 cm, y b) perpendicular a la mesa y que pasa por la marca de 0 cm.

R: a) $0.433 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$; b) $1.73 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

18. Un estudiante sentado sobre un banquillo que gira libremente sostiene dos pesas, cada una de las cuales tiene una masa de 3 kg. Cuando sus brazos se extienden de manera horizontal las pesas están a 1 m del eje de rotación y él gira a una rapidez angular de 0.75 rad/s. El momento de inercia del estudiante más el banquillo es $3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ y se supone constante. El estudiante lleva las pesas hacia su cuerpo horizontalmente a una posición de 0.3 m del eje de rotación. a) Encuentre la nueva rapidez angular del estudiante. b) Encuentre la energía cinética del estudiante antes y después de que lleve las pesas hacia su cuerpo.

R: a) 1.91 rad/s; b) 2.53 J, 6.44 J

19. Una mujer de 60 kg que está parada en el borde de una mesa giratoria horizontal tiene un momento de inercia de $500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ y un radio de 2 m. La mesa giratoria al principio está en reposo y tiene libertad de girar alrededor de un eje vertical sin fricción que pasa por su centro. La mujer empieza a caminar alrededor de la orilla en dirección de las manecillas del reloj a una rapidez constante de 1.5 m/s en relación con la tierra. a) ¿En qué dirección y a qué rapidez angular gira la mesa? b) ¿Cuánto trabajo realiza la mujer para poner en movimiento la mesa giratoria?

R: a) 0.36 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj ; b) 99.9 J

20. Se lanza un trozo de arcilla pegajosa de masa m y velocidad \mathbf{v}_i a un cilindro sólido de masa M y radio R (ver figura 11). El cilindro inicialmente está en reposo y montado sobre un eje horizontal fijo que pasa por su centro de masa. La línea de movimiento del proyectil es perpendicular al eje y está a una distancia d , menor a R , desde el centro. a) Encuentre la rapidez angular del sistema justo después de que la arcilla golpee y se pegue a la superficie del cilindro. b) ¿La energía mecánica se conserva en este proceso? Explique.

R: a) $\omega = 2mv_i d / (M + 2m)R^2$; b) No; alguna energía mecánica cambia en energía interna.

Misceláneos

21. Una cuerda se enrolla alrededor de un disco uniforme de radio R y masa M . El disco se suelta desde el reposo cuando la cuerda está vertical y su extremo superior está amarrado a una varilla fija (ver figura 12). a) La tensión en la cuerda es un tercio del peso del disco, b) la magnitud de la aceleración del centro de masa es $2g/3$, y c) la rapidez del centro de masa es $(4gh/3)^{1/2}$ conforme el disco desciende. Verifique su respuesta a la pregunta c) utilizando métodos de energía.

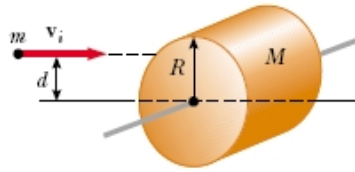


Figura 11:

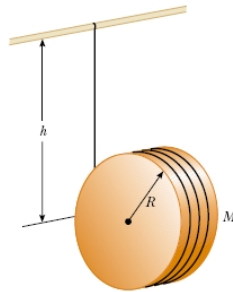


Figura 12:

22. Una esfera sólida de masa m y radio r rueda sin deslizarse a lo largo de la pista mostrada en la figura 13. Si la esfera parte del reposo con su punto más bajo a una altura h sobre el fondo de un rizo de radio R , el cual es mucho más grande que r , a) ¿Cuál es el valor mínimo de h (en función de R) para que la esfera complete la trayectoria en el rizo? b) ¿Cuáles son las componentes de fuerza de la esfera en el punto P si $h=3R$?

R: a) $2.7R$; b) $F_x = -\frac{20}{7}mg$, $F_y = -mg$

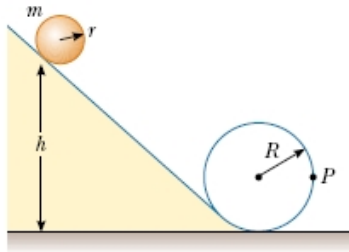


Figura 13:

23. Un carrete de alambre de masa M y radio R se desenrolla con una fuerza constante \mathbf{F} (figura 14). Suponiendo que el carrete es un cilindro sólido uniforme que no se desliza, muestre que: a) la aceleración del centro de masa es $4\mathbf{F}/3M$, y b) la fuerza de fricción es hacia la derecha y su magnitud es igual a $F/3$. c) Si el cilindro parte del reposo y rueda sin deslizarse, ¿Cuál es la rapidez de su centro de masa después de que ha rodado una distancia d ?

R: c) $(8Fd/3M)^{1/2}$

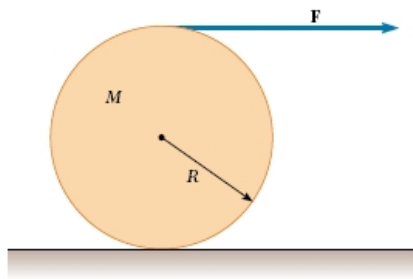


Figura 14: