

Guía 1

Lunes 21 de Marzo de 2011

Tarea: **5-7**

Entrega: Martes 29 de Marzo de 2011

Introducción Matemática

1. El espacio de estados de cierto sistema físico es tridimensional. Sea $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ una base ortonormal de este espacio.

Definamos

$$|\psi_o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{i}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle,$$
$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|u_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|u_3\rangle.$$

¿Están normalizados estos kets?

2. Sea $|u_1\rangle, |u_2\rangle$ y $|u_3\rangle$ una base ortonormal de un espacio tridimensional complejo, y sea

$$|\phi_1\rangle = |u_1\rangle - 2|u_2\rangle,$$
$$|\phi_2\rangle = |u_1\rangle - i|u_3\rangle,$$
$$|\phi_3\rangle = |u_3\rangle.$$

- a) Evalúe los productos $\langle\phi_1|\phi_2\rangle, \langle\phi_2|\phi_3\rangle, \langle\phi_3|\phi_1\rangle$
b) Encuentre las constantes c_1, c_2 y c_3 tal que los vectores $c_1|\phi_1\rangle, c_2|\phi_2\rangle$, y $c_3|\phi_3\rangle$ estén normalizados.

3. Sea $|u_1\rangle, |u_2\rangle$ y $|u_3\rangle$ una base ortonormal y sea

$$|\phi_1\rangle = \alpha\{i|u_1\rangle + |u_2\rangle - |u_3\rangle\},$$
$$|\phi_2\rangle = \beta\{|u_2\rangle + |u_3\rangle\}.$$

- a) Muestre que $\langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0$ para todo α y β .
b) Encuentre α y β tal que $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ estén normalizados.
c) Encuentre un vector $|\phi_3\rangle$ tal que junto a $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ formen una base ortonormal.

4. Considere los estados

$$|\psi\rangle = 9i|\phi_1\rangle + 2|\phi_2\rangle,$$
$$|\chi\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle,$$

donde los dos vectores $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ forman una base ortonormal completa.

- a) Calcule los operadores $|\psi\rangle\langle\chi|$ y $|\chi\rangle\langle\psi|$. ¿Son estos iguales?
b) Encuentre el hermítico de $|\psi\rangle, |\chi\rangle, |\psi\rangle\langle\chi|$ y $|\chi\rangle\langle\psi|$
c) Calcule $\text{Tr}(|\psi\rangle\langle\chi|)$ y $\text{Tr}(|\chi\rangle\langle\psi|)$. ¿Son iguales?

- d) Calcule $|\psi\rangle\langle\psi|$ y $|\chi\rangle\langle\chi|$ y sus respectivas trazas $\text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|)$ y $\text{Tr}(|\chi\rangle\langle\chi|)$. ¿Son estos los proyectores?
5. Sea $\check{\mathbf{K}}$ el operador definido como $\check{\mathbf{K}} = |\varphi\rangle\langle\psi|$, donde $|\varphi\rangle$ y $|\psi\rangle$ son dos vectores del espacio de estados.
- a) ¿Qué condiciones se deben cumplir para que $\check{\mathbf{K}}$ sea un operador hermítico?
- b) Calcule $\check{\mathbf{K}}^2$. ¿Bajo qué condiciones es $\check{\mathbf{K}}$ un proyector?
- c) Muestre que $\check{\mathbf{K}}$ siempre puede ser escrito de la forma $\check{\mathbf{K}} = \lambda \check{\mathbf{P}}_1 \check{\mathbf{P}}_2$, donde λ es una constante por calcular, mientras que $\check{\mathbf{P}}_1$ y $\check{\mathbf{P}}_2$ son proyectores.
6. Sea $\check{\mathbf{P}}_i$ el proyector ortogonal en el subespacio $\mathcal{E}_i$, con $i = \{1, 2\}$. Muestre que, para que el producto $\check{\mathbf{P}}_1 \check{\mathbf{P}}_2$ también sea ortogonal, es necesario y suficiente que $\check{\mathbf{P}}_1$ y $\check{\mathbf{P}}_2$ conmuten. En este caso, ¿cuál es el subespacio en el que $\check{\mathbf{P}}_1 \check{\mathbf{P}}_2$ proyecta?
7. Se define

$$\check{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que se cumple la relación

$$e^{i\alpha\check{\sigma}_x} = \check{\mathbf{I}} \cos \alpha + i\check{\sigma}_x \sin \alpha,$$

donde $\check{\mathbf{I}}$ es la matriz identidad de dimensión 2×2 .

8. Considere los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 4, definidos entre $-1 \leq x \leq 1$, para los cuales se define el producto interno:

$$\langle P(x), Q(x) \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$$

A partir de la base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ obtener una base ortonormal y representar el vector $\psi(x) = x^2 - 1$ respecto a ella.

9. En el espacio vectorial del problema anterior, considere el operador

$$\check{\mathbf{A}}P_n(x) = \frac{dP_n}{dx}$$

- a) Encontrar la matriz $\mathcal{A}$ que representa a $\check{\mathbf{A}}$ en la base $\{\phi_n = x^n/n!\}$.
- b) Encontrar la matriz $\mathcal{B}$ del operador $\check{\mathbf{A}}^2 = d^2/dx^2$ y verificar que $\mathcal{B} = \mathcal{A}^2$.
10. Como una combinación lineal de dos matrices de la misma dimensión es otra matriz con la misma dimensión, es posible considerar a las matrices como elementos de un espacio vectorial lineal. Muestre que cualquier matriz de 2×2 puede ser expresada como una combinación lineal de las siguientes cuatro matrices.

$$\check{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \check{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\check{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

11. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son matrices de la misma forma, muestre que $\langle \mathcal{A} | \mathcal{B} \rangle = \text{Tr}(\mathcal{A}^\dagger \mathcal{B})$ utilizando todas las propiedades del producto interno. También pruebe que las cuatro matrices del problema anterior son ortogonales con respecto a este producto interno.

12. Pruebe que la traza de un operador $\check{\mathbf{A}}$, $\text{Tr } \check{\mathbf{A}} = \sum_n \langle u_n | \check{\mathbf{A}} | u_n \rangle$, es independiente de la base ortonormal $\{|u_n\rangle\}$ que se escoga.
13. Sea $|u_1\rangle, |u_2\rangle$ y $|u_3\rangle$ una base ortonormal y sea

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= 2|u_1\rangle + i|u_3\rangle, \\ |\psi\rangle &= |u_2\rangle - |u_3\rangle, \end{aligned}$$

Sea $\check{\mathbf{O}}$ un operador cuya representación matricial en la base $|u_i\rangle$ está dada por

$$\check{\mathbf{O}} = \begin{pmatrix} 4 & 2i & 3 \\ -2i & 0 & 1+i \\ 3 & 1-i & -2 \end{pmatrix}$$

¿Es $\check{\mathbf{O}}$ autohermítico? Ilustre su respuesta calculando $\langle \phi | \check{\mathbf{O}} | \psi \rangle$ y $\langle \psi | \check{\mathbf{O}} | \phi \rangle$.

14. En un espacio vectorial de dos dimensiones, considere el operador cuya matriz, en una base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle\}$, se escribe como

$$\check{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

- ¿Es la matriz $\check{\sigma}_y$ hermítica? Calcule sus autovalores y autovectores. Expanda estos autovectores en términos de $|1\rangle$ y $|2\rangle$.
- Calcule las matrices de proyección en la nueva base. Luego, verifique que éstos satisfacen la ortogonalidad y relaciones de clausura.
- Haga lo mismo para las matrices

$$\check{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

y, en un espacio tridimensional,

$$\check{\mathbf{L}}_y = \frac{\hbar}{2i} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

15. La ‘función’ δ de Dirac se define de la siguiente manera:

- $\delta(x-a) = 0$ para todo $x \neq a$
-

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

A partir de ello, demuestre las siguientes propiedades:

- $\delta(x)$ es función par
- $\delta'(x) = -\delta'(-x)$
- $x\delta(x) = 0$
- $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$, $a \neq 0$
- $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a}[\delta(x+a) + \delta(x-a)]$, $a > 0$.

6)

$$\delta[g(x)] = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

donde x_i es el i -ésimo cero de la función $g(x)$.

7)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x)^{(n)} dx = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

8)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk = 2\pi \delta(x)$$

9) Evalúe

$$\int_0^\pi dx \int_1^2 dy \delta(\sin x) \delta(x^2 - y^2)$$

16. En 3 dimensiones, la δ de Dirac se define como una función tal que

$$\delta(\mathbf{x}) = \delta(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{si} \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0$$

y

$$\int \int \int \delta(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = 1, \quad \text{con} \quad \delta(x_1, x_2, x_3) = \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3).$$

Muestre que, en coordenadas cilíndricas,

$$\delta(r, \theta, z) = \frac{\delta(r) \delta(z)}{\pi r},$$

mientras que, en coordenadas esféricas,

$$\delta(r, \theta, \phi) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}.$$

17. Demuestre las siguientes propiedades de los conmutadores:

- a) $[\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}\check{\mathbf{C}}] = [\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}]\check{\mathbf{C}} + \check{\mathbf{B}}[\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{C}}]$
- b) $[\check{\mathbf{A}}\check{\mathbf{B}}, \check{\mathbf{C}}] = \check{\mathbf{A}}[\check{\mathbf{B}}, \check{\mathbf{C}}] + [\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{C}}]\check{\mathbf{B}}$
- c) $[\check{\mathbf{A}}, [\check{\mathbf{B}}, \check{\mathbf{C}}]] + [\check{\mathbf{B}}, [\check{\mathbf{C}}, \check{\mathbf{A}}]] + [\check{\mathbf{C}}, [\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}]]$
- d) $[\check{\mathbf{B}}, \check{\mathbf{A}}^n] = n\check{\mathbf{A}}^{n-1}[\check{\mathbf{B}}, \check{\mathbf{A}}]$ cuando $\check{\mathbf{A}}[\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}] = [\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}]\check{\mathbf{A}}$.
- e) $[\check{\mathbf{A}}, f(\check{\mathbf{A}})] = \check{\mathbf{0}}$ para toda función analítica f de $\check{\mathbf{A}}$.
- f) $e^{\check{\mathbf{A}}}\check{\mathbf{B}}e^{-\check{\mathbf{A}}} = \check{\mathbf{B}} + [\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}] + \frac{1}{2!}[\check{\mathbf{A}}, [\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}]] + \frac{1}{3!}[\check{\mathbf{A}}, [\check{\mathbf{A}}, [\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}]]] + \dots$
- g) Si $\check{\mathbf{A}}$ y $\check{\mathbf{B}}$ conmutan con $[\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}]$, entonces
 - $e^{\check{\mathbf{A}}}\check{\mathbf{B}}e^{-\check{\mathbf{A}}} = \check{\mathbf{B}} + [\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}].$
 - $e^{\check{\mathbf{A}}}e^{\check{\mathbf{B}}} = e^{\check{\mathbf{A}}+\check{\mathbf{B}}+\frac{1}{2}[\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}]} = e^{\check{\mathbf{A}}+\check{\mathbf{B}}}e^{\frac{1}{2}[\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}]} = e^{\check{\mathbf{B}}}e^{\check{\mathbf{A}}}e^{[\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}]}.$

18. Sean $\check{\mathbf{A}}$ y $\check{\mathbf{B}}$ operadores hermíticos. Muestre que su conmutador es un operador anti-hermítico ($\check{\mathbf{O}}^\dagger = -\check{\mathbf{O}}$).

19. Sean $\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}, \check{\mathbf{C}}$ tres operadores, demuestre que:

$$a) (\check{\mathbf{A}}\check{\mathbf{B}})^\dagger = \check{\mathbf{B}}^\dagger \check{\mathbf{A}}^\dagger$$

b) $(\check{\mathbf{A}}\check{\mathbf{B}}\check{\mathbf{C}})^\dagger = \check{\mathbf{C}}^\dagger\check{\mathbf{B}}^\dagger\check{\mathbf{A}}^\dagger$

20. Considere una matriz $\check{\mathbf{A}}$, con un **ket** $|\psi\rangle$ y un **bra** $\langle\phi|$:

$$\check{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 5 & 3+2i & 3i \\ -i & 3i & 8 \\ 1-i & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} -1+i \\ 3 \\ 2+3i \end{pmatrix}, \quad \langle\phi| = (\ 6 \quad -i \quad 5)$$

a) Calcule las cantidades $\check{\mathbf{A}}|\psi\rangle$, $\langle\phi|\check{\mathbf{A}}|\psi\rangle$ y $|\psi\rangle\langle\phi|$.

b) Encuentre el complejo conjugado, la traspuesta y el conjugado hermítico de $\check{\mathbf{A}}$, $|\psi\rangle$ y $\langle\phi|$.

21. Muestre que :

a) $\text{Tr}(\check{\mathbf{A}}\check{\mathbf{B}}) = \text{Tr}(\check{\mathbf{B}}\check{\mathbf{A}})$

b) La traza de un conmutador, siempre es cero.

c) Ilustre los resultados mostrados en a) y b) con las matrices.

$$\check{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 8-2i & 4i & 0 \\ 1 & 0 & 1-i \\ -8 & i & 6i \end{pmatrix}, \quad \check{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -i & 2 & 1-i \\ 6 & 1+i & 3i \\ 1 & 5+7i & 0 \end{pmatrix}.$$