

Guía 2a

Martes 5 de Abril de 2011

Tarea: **5, 11a, 11e, 11f**

Entrega: Martes 12 de Abril de 2011

Postulados, Probabilidad y Valores Esperados

1. Considere un sistema cuyo estado está dado en términos de un conjunto ortonormal completo de 5 vectores $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, |\psi_4\rangle$ y $|\psi_5\rangle$ como sigue:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{19}}|\psi_1\rangle + \frac{2}{\sqrt{19}}|\psi_2\rangle + \sqrt{\frac{2}{19}}|\psi_3\rangle + \sqrt{\frac{3}{19}}|\psi_4\rangle + \sqrt{\frac{5}{19}}|\psi_5\rangle$$

donde $|\psi_n\rangle$ son autoestados del hamiltoniano del sistema, $\hat{\mathbf{H}}|\psi_n\rangle = n\varepsilon_0|\psi_n\rangle$, con $n = 1, 2, 3, 4, 5$, y ε_0 tiene dimensiones de energía.

- Si se mide la energía sobre un gran número de sistemas idénticos que están todos inicialmente en el mismo estado $|\phi\rangle$, ¿que valores se pueden obtener y con que probabilidad?
 - Encuentre la energía promedio del sistema.
2. Una variable dinámica es representada en la base $|u_i\rangle$ por la siguiente matriz autohermítica:

$$\check{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & i/\sqrt{2} & -i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 1 & 1 \\ i\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En un cierto tiempo t el vector de estado del sistema está dado por $|\psi\rangle = |u_3\rangle$.

- ¿Cuáles son los posibles resultados de una medida de $\check{\mathbf{A}}$ y su correspondiente probabilidad?
 - ¿Cuál es el valor medio de $\check{\mathbf{A}}$ y cuál es la desviación estándar de $\check{\mathbf{A}}$ en el estado $|\psi\rangle$
3. Considere un sistema físico, cuyo hamiltoniano $\check{\mathbf{H}}$ y su estado inicial $|\psi_0\rangle$ están dados por:

$$\check{\mathbf{H}} = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde ε tiene dimensiones de energía.

- ¿Que valores obtendremos cuando midamos la energía y con que probabilidades?
 - Calcule $\langle \check{\mathbf{H}} \rangle$, el valor esperado del hamiltoniano.
4. Considere un sistema cuyo estado (en cierto tiempo t) y dos observables están dados por

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \check{\mathbf{A}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que una medida de $\check{\mathbf{A}}$ en el tiempo t entregue -1?
- Consideremos un conjunto de dos medidas, donde $\check{\mathbf{B}}$ es medido primero y luego, inmediatamente después, $\check{\mathbf{A}}$ es medido. Encuentre la probabilidad de obtener el valor 0 para $\check{\mathbf{B}}$ y el valor 1 para $\check{\mathbf{A}}$.
- Ahora medimos $\check{\mathbf{A}}$ primero y luego $\check{\mathbf{B}}$. Encuentre la probabilidad de obtener un valor de 1 para $\check{\mathbf{A}}$ y un valor de 0 para $\check{\mathbf{B}}$.
- Compare los resultados de b) y c). Explique.

5. Sea $\check{\mathbf{A}}_\theta$ el operador asociado a la medición de cierta variable dinámica de un sistema dado en la dirección θ . En cierta base, este operador está representado por la matriz

$$\check{\mathbf{A}}_\theta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -i \sin \theta \\ i \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

- ¿Puede $\check{\mathbf{A}}_\theta$ asociarse realmente a un observable físico?
- Calcular los autovectores, ortonormalizarlos y verificar la completitud de la base obtenida.
- ¿Cuáles son los valores posibles que se obtienen al medir este observable?
- Se mide $\check{\mathbf{A}}_z$ ($\check{\mathbf{A}}_{\theta=0}$) y se obtiene como resultado a_1 ($\geq a_2$). Se vuelve a medir $\check{\mathbf{A}}_z$. ¿Cuál es la probabilidad de obtener a_2 ?
- Se mide $\check{\mathbf{A}}_z$ y se obtiene a_1 . Luego se mide $\check{\mathbf{A}}_\theta$ (θ arbitrario). ¿Qué se obtiene? ¿Hay algún θ para el cual se obtenga a_2 con certeza?
- Se mide $\check{\mathbf{A}}_z$ y se obtiene a_2 . Luego se mide $\check{\mathbf{A}}_{\pi/2}$ y se obtiene a_1 . ¿Qué probabilidad hay de obtener a_2 al medir $\check{\mathbf{A}}_z$?

6. En un problema unidimensional, considere una partícula cuya función de onda es:

$$\psi(x) = N \frac{e^{ip_0 x/\hbar}}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

donde a y p_0 son constantes reales y N es el coeficiente de normalización.

- Determine N tal que $\psi(x)$ esté normalizado
- Si la posición de la partícula es medida, ¿cual es la probabilidad de encontrar un resultado entre $(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}})$?
- Calcule el valor medio del momentum de una partícula que esta descrita por esta función de onda.

7. ¿Cual es el valor promedio $\langle x \rangle$ y la varianza Δx para las siguientes densidades de probabilidad?

- $P(x) = A (1 + (x - x_0)^2)^{-1}$
- $P(x) = A x^2 \exp(-x^2/2a^2)$
- $P(x) = A \sin^2((x - x_0)/\sqrt{2a} - 8\pi) \exp(-(x - x_0)^2/2a^2)$

8. Se tiene que

$$\psi(x) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{-1/4} \exp \frac{-\alpha x^2}{2}.$$

- Calcule $\langle \check{\mathbf{x}}^n \rangle$ para n par (¿Por qué este valor es cero para n impar?)

- b) Sabemos cual es el papel que tiene el principio de incertidumbre en mecánica cuántica, en la posición está descrito por $\Delta\check{\mathbf{x}} = \sqrt{\langle\check{\mathbf{x}}^2\rangle - \langle\check{\mathbf{x}}\rangle^2}$. Calcule $\Delta\check{\mathbf{x}}$ para la función $\psi(x)$ dada anteriormente.
9. Calcule $\langle\check{\mathbf{p}}\rangle$ y $\langle\check{\mathbf{p}}^2\rangle$ para la función de onda $\psi(x) = R(x) \exp(i\frac{S(x)}{\hbar})$, donde $R(x)$ y $S(x)$ son funciones reales de x .
10. Demuestre que el valor medio de un observable $\check{\mathbf{A}}$ en un estado $|\psi\rangle$ corresponde al mínimo valor del parámetro λ para el cual la función

$$\sigma^2(\lambda) = \langle\psi|(\check{\mathbf{A}} - \lambda)^2|\psi\rangle$$

(Dispersión de $\check{\mathbf{A}}$ con respecto al valor λ) es mínima, y que este mínimo vale

$$\sigma_{min}^2 = \langle\check{\mathbf{A}}^2\rangle - \langle\check{\mathbf{A}}\rangle^2 = (\Delta\check{\mathbf{A}})^2$$

es decir, la dispersión es mínima con respecto al valor medio.

Representación posición y momentum

11. El operador correspondiente la observable momentum angular es $\check{\mathbf{L}} = \check{\mathbf{r}} \times \check{\mathbf{p}}$. Demuestre:
- $[\check{\mathbf{L}}_i, \check{\mathbf{L}}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\check{\mathbf{L}}_k$
 - $[\check{\mathbf{L}}^2, \check{\mathbf{L}}_i] = 0$ con $\check{\mathbf{L}}^2 = \sum_{i=1}^3 \check{\mathbf{L}}_i^2$. ¿que conclusiones sacaría de (a) y (b)?
 - $[\check{\mathbf{L}}_i, V(\check{\mathbf{r}}^2)] = [\check{\mathbf{L}}_i, F(\check{\mathbf{p}}^2)] = [\check{\mathbf{L}}_i, G(\check{\mathbf{p}} \cdot \check{\mathbf{r}})] = 0$
 - $\check{\mathbf{L}} = \check{\mathbf{L}}^\dagger$
 - $[\check{\mathbf{L}}_i, \check{\mathbf{r}}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\check{\mathbf{r}}_k$
 - $[\check{\mathbf{L}}_i, \check{\mathbf{p}}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\check{\mathbf{p}}_k$
12. Basado en las Proposiciones de las págs. 79 y 80 de los apuntes, demuestre las siguientes afirmaciones:
- Si $\mathcal{B}(x, p)$ es un observable clásico con el desarrollo

$$\mathcal{B}(x, p) = \sum_{k, \ell} B_{k\ell} x^k p^\ell,$$

entonces el operador $\check{\mathbf{B}} = \mathcal{B}(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{p}})$ cumple

$$[\check{\mathbf{p}}, \check{\mathbf{B}}] \check{\mathbf{p}} = \check{\mathbf{p}} [\check{\mathbf{p}}, \check{\mathbf{B}}] + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

- El conmutador entre el operador momentum y una función f del operador posición está dado por:

$$[f(\check{\mathbf{x}}_\alpha), \check{\mathbf{p}}_\beta] = i\hbar \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \delta_{\alpha\beta}$$

- El conmutador entre el operador posición y una función f del operador momentum está dado por:

$$[f(\check{\mathbf{p}}_\alpha), \check{\mathbf{x}}_\beta] = -i\hbar \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \delta_{\alpha\beta}$$

13. Evalúe el conmutador $[\tilde{\mathbf{x}}, e^{\frac{i}{\hbar} a \tilde{\mathbf{p}}_x}]$ y demuestre que $e^{\frac{i}{\hbar} a \tilde{\mathbf{p}}_x} |x'\rangle$ (con $\tilde{\mathbf{x}}|x'\rangle = x'|x'\rangle$) es un autoestado del operador de posición $\tilde{\mathbf{x}}$. ¿Cuál es el correspondiente autovalor?
14. Un potencial local es descrito por el operador $\tilde{\mathbf{W}}$, cuya representación en coordenadas es diagonal, es decir, $\langle x|\tilde{\mathbf{W}}|x'\rangle = \delta(x - x')W(x)$ ¿Cual es la correspondiente propiedad en representación de momenta, $\langle p|\tilde{\mathbf{W}}|p'\rangle$?
15. Suponga que cierta partícula está descrita por la función de estado $\psi(x) = ce^{iqx - \alpha x^2}$, donde c es una constante de normalización mientras que q y α son parámetros reales. Calcule el promedio del operador momentum de las dos maneras siguientes:

a) usando la representación de coordenadas

$$\langle \tilde{\mathbf{p}} \rangle = \int \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) dx$$

b) usando la representación de momenta obtenga la distribución de probabilidad y entonces calcule el promedio del momentum $\langle p \rangle$ de esa distribución.

c) calcule $\langle p^2 \rangle$ usando apropiadamente las generalizaciones de los métodos utilizados en las partes anteriores.

16. Teorema del Virial:

a) Pruebe que el teorema del virial en una dimensión toma la forma:

$$\left\langle \frac{\tilde{\mathbf{p}}^2}{2m} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \tilde{\mathbf{x}} \frac{dV(\tilde{\mathbf{x}})}{dx} \right\rangle$$

b) Muestre que para una función de onda real $\psi(x)$ esta relación toma la forma de :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) x \frac{dV}{dx} \psi(x) = -\langle V \rangle + 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d\psi}{dx} x V(x) \psi(x)$$

17. Considere el Hamiltoniano $\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{p}}^2/(2m) + \tilde{\mathbf{V}}(r)$, con su conjunto de vectores propios $|k\rangle$ y valores propios E_k (espectro completamente discreto).

a) Muestre que si $|l\rangle$ es cualquier ket propio, asociado a un valor propio E_l , se cumple:

$$\sum_k (E_k - E_l) |\langle k|\tilde{\mathbf{x}}|l\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2m} ,$$

donde $\tilde{\mathbf{x}}$ es una componente cartesiana de $\tilde{\mathbf{r}}$.

b) Demuestre la regla de suma de Thomas-Reiche-Kuhn (pág. 86 Apuntes).

18. Demuestre que la integral:

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \Psi(\vec{k}) e^{-i\omega(\vec{k})t} \\ &= \frac{C'}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \hbar k^2 t/(2m))} e^{-\sigma_o^2 k^2} . \end{aligned}$$

tiene como resultado

$$\Psi(\vec{r}, t) = C \left(\frac{m}{2\pi\hbar i t} \right)^{3/2} \gamma^{-3} \exp \left(\frac{i\beta r^2}{4\sigma_o^2 \gamma} \right) ,$$

donde β y γ vienen definidas por

$$\beta \equiv \frac{m}{2\hbar t} ,$$

y

$$\gamma = \frac{1}{4\sigma_o^2} - i\beta .$$

Encuentre la relación entre C y C' .

19. Demuestre que en la ecuación (2.56) de la pág. 96 de los Apuntes, el ancho $\sigma(t)$ viene dado por:

$$\sigma^2(t) = \sigma_o^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2 \sigma_o^2} .$$

20. Un electrón se mueve en la dirección x con una longitud de onda de Broglie de 10^{-8} cm

- a) ¿Cual es la energía del electrón, en eV?
- b) ¿Cual es la función de onda tiempo independiente del electrón?

21. Considere tres observables $\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}$ y $\check{\mathbf{C}}$. Si sabemos que:

$$[\check{\mathbf{B}}, \check{\mathbf{C}}] = \check{\mathbf{A}}$$

$$[\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{C}}] = \check{\mathbf{B}}$$

Muestre que

$$\Delta(AB) \geq \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$$

22. Muestre que en tres dimensiones la relación de incertidumbre entre coordenadas y momentum está dada por:

$$(\Delta \check{\mathbf{r}})^2 (\Delta \check{\mathbf{p}})^2 \geq \frac{9}{4} \hbar^2$$

$$\text{donde } (\Delta \check{\mathbf{A}})^2 = \langle (\check{\mathbf{A}} - \langle \check{\mathbf{A}} \rangle)^2 \rangle$$

23. Muestre, calculando explícitamente, que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) x \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(p) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \right) \phi(p) dp.$$

Indicación: Si es necesario utilice que el comportamiento de $\phi(p)$ en $p = \pm\infty$ es conocido.

24. Muestre la siguiente relación entre el operador posición y momentum

$$e^{i \frac{\check{\mathbf{p}} a}{\hbar}} \check{\mathbf{x}} e^{-i \frac{\check{\mathbf{p}} a}{\hbar}} = \check{\mathbf{x}} + a \check{\mathbf{I}} .$$

Esto quiere decir que el operador momentum es generador de traslaciones en el espacio de coordenadas.

25. a) Pruebe que hay igualdad en la relación de incertidumbre $\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq |\langle [A, B] \rangle|^2$ si se cumple $\Delta A = \lambda \Delta B$ con λ imaginario puro.
- b) Pruebe que el paquete de ondas gaussiano

$$\langle x' | \alpha \rangle = (2\pi d^2)^{-1/4} \exp \left[\frac{i \langle \check{\mathbf{p}} \rangle x'}{\hbar} - \frac{(x' - \langle \check{\mathbf{x}} \rangle)^2}{4d^2} \right]$$

satisface la relación de incerteza mínima y que se tiene, de acuerdo con (a), $\langle x' | \Delta \check{\mathbf{x}} | \alpha \rangle = \lambda \langle x' | \Delta p | \alpha \rangle$ con λ imaginario puro.

26. Demuestre que si un operador en el cuadro de Schrödinger depende explícitamente del tiempo, entonces la ecuación dinámica para el operador correspondiente en el cuadro de Heisenberg es:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \check{\mathbf{F}}_H(t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \check{\mathbf{F}}_H(t) + [\check{\mathbf{F}}_H, \check{\mathbf{H}}] .$$

Misceláneos

27. Considere un sistema físico tridimensional cuyo espacio de estados es generado por la base ortonormal formada por los kets $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle$. En la base de estos tres vectores, tomados en ese orden, los dos operadores $\check{\mathbf{H}}$ y $\check{\mathbf{B}}$ están definidos por

$$\check{\mathbf{H}} = \hbar\omega_o \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \check{\mathbf{B}} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

donde ω_o y b son constantes reales positivas.

- ¿son $\check{\mathbf{H}}$ y $\check{\mathbf{B}}$ hermíticos?
- Muestre que $\check{\mathbf{H}}$ y $\check{\mathbf{B}}$ conmutan. Encuentre una base de autovectores comunes para ambos operadores.
- De los conjuntos de operadores $\{\check{\mathbf{H}}\}, \{\check{\mathbf{B}}\}, \{\check{\mathbf{H}}, \check{\mathbf{B}}\}, \{\check{\mathbf{H}}^2, \check{\mathbf{B}}\}$, ¿cuál forma un Conjunto Completo de Observables Compatibles (CCOC)?
- Suponga ahora que en este espacio se definen dos nuevos operadores $\check{\mathbf{L}}_z$ y $\check{\mathbf{S}}$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{L}}_z|u_1\rangle &= |u_1\rangle & \check{\mathbf{L}}_z|u_2\rangle &= 0 & \check{\mathbf{L}}_z|u_3\rangle &= -|u_3\rangle \\ \check{\mathbf{S}}|u_1\rangle &= |u_3\rangle & \check{\mathbf{S}}|u_2\rangle &= |u_2\rangle & \check{\mathbf{S}}|u_3\rangle &= |u_1\rangle \end{aligned}$$

- Escriba las matrices que representan a los operadores $\check{\mathbf{L}}_z, \check{\mathbf{L}}_z^2, \check{\mathbf{S}}, \check{\mathbf{S}}^2$, en la base de los $|u_i\rangle$. ¿Corresponden estos operadores a observables?
 - Encuentre la forma más general para un operador que conmuta con $\check{\mathbf{L}}_z$. Lo mismo para $\check{\mathbf{L}}_z^2$ y $\check{\mathbf{S}}^2$.
 - ¿Forman $\check{\mathbf{L}}_z^2$ y $\check{\mathbf{S}}$ un CCOC? Encuentre la base de autovectores comunes.
28. Sean B y C dos observables que anticonmutan. Sea $|\psi\rangle$ un estado propio de B y C . ¿Qué se puede afirmar de los correspondientes valores propios? Suponga ahora que C satisface además:

$$C^2 = I$$

¿Que implica su resultado en este caso?