

Guía 2b

Jueves 7 de Abril de 2011

Evolucion temporal

1. Considere un sistema físico tridimensional cuyo estado es descrito por la base ortonormal formada por los kets $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle$. En esta base el operador Hamiltoniano $\check{\mathbf{H}}$ del sistema y los dos observables $\check{\mathbf{A}}$ y $\check{\mathbf{B}}$ son:

$$\check{\mathbf{H}} = \hbar\omega_o \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \check{\mathbf{A}} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \check{\mathbf{B}} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde ω_o , a y b son constantes reales positivas. El sistema físico en tiempo $t=0$ está en el estado:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$

- Si en $t = 0$ se mide la energía del sistema, ¿qué valores pueden ser encontrados y con qué probabilidad?. Para el sistema en el estado $|\psi(0)\rangle$, calcule el valor medio (valor esperado) de $\langle\check{\mathbf{H}}\rangle$ y la desviación cuadrática media (varianza) ΔH .
 - Si en vez de medir $\check{\mathbf{H}}$ en $t = 0$, se mide $\check{\mathbf{A}}$, ¿qué valores pueden ser encontrados, y con qué probabilidad? ¿Cuál es el estado inmediatamente después de la medición?
 - Calcule el estado $|\psi(t)\rangle$ del sistema para un tiempo t cualquiera.
 - Calcule el promedio $\langle\check{\mathbf{A}}\rangle$ y $\langle\check{\mathbf{B}}\rangle$ para un tiempo t cualquiera. ¿Qué conclusiones podemos sacar?
 - ¿Qué resultados son obtenidos si medimos el observable $\check{\mathbf{A}}$ en un tiempo t ? Repita lo mismo para el observable $\check{\mathbf{B}}$. Interprete.
2. Considere el paquete de ondas Gaussiano para $t = 0$ de una partícula libre:

$$\psi(x, 0) = Ce^{-x^2/4\sigma^2}$$

- Muestre que en $t = 0$ $\langle\check{\mathbf{x}}\rangle = 0$ y $\Delta\check{\mathbf{x}} = \sigma$.
 - Calcule $\psi(x, t)$ para todo t .
 - Calcule $|\psi(x, t)|^2$ y muestre que el paquete de ondas no se desplaza en el tiempo, pero se dispersa.
 - ¿Para qué valor de σ la dispersión del paquete de ondas $(\Delta\check{\mathbf{x}})^2$ en un instante t cualquiera es mínima?
3. La función de onda para una partícula libre unidimensional está dada, para $t = 0$, por:

$$\psi(x, 0) = N \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-|k|/k_o} e^{ikx}$$

donde k_o y N son constantes.

- ¿Cuál es la probabilidad $\mathcal{P}(p_1, 0)$ que la medición del momentum hecha a tiempo $t = 0$ de un resultado entre $-p_1$ y p_1 ? Esboce la función $\mathcal{P}(p_1, 0)$

- b) ¿Qué sucede con la probabilidad $\mathcal{P}(p_1, t)$ si la medición es hecha en un tiempo t ? Interprete el resultado.
- c) ¿Cuál es la forma de el paquete de ondas en el tiempo $t = 0$? Calcule para este tiempo el producto $\Delta\check{\mathbf{x}}\Delta\check{\mathbf{p}}$. ¿Cuál es su conclusión?. Describa cualitativamente la evolución del paquete de ondas.
4. Una partícula está confinada al interior de una caja que está dividida en una parte izquierda y otra derecha por una membrana. Se cuenta con un detector que especifica totalmente el estado actual de la partícula, diciendo si se encuentra a la derecha o a la izquierda del recipiente. (A estos dos estados se les puede llamar $|D\rangle$ y $|I\rangle$, respectivamente, y se les puede considerar base ortonormal.) El Hamiltoniano es

$$\check{\mathbf{H}} = E(|I\rangle\langle D| + |D\rangle\langle I|) .$$

- a) Encuentre los autovalores y autovectores del sistema.
- b) Muestre que hay efecto túnel, es decir, que si en $t = 0$ la partícula está a la izquierda, hay una probabilidad no nula de observarla a la derecha para $t > 0$. ¿Cuál es la probabilidad de observarla a la derecha como función del tiempo?
- c) Suponga que erróneamente se usa $\check{\mathbf{H}} = E(|D\rangle\langle I|)$. Muestre que en tal caso no se conserva la probabilidad.
5. El operador autohermítico asociado con una variable dinámica $\check{\mathbf{A}}$ de cierto sistema físico se representa en la base $|u_i\rangle$ como :

$$\check{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{6} & 4 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}$$

- a) Muestre que los autovalores y autovectores del operador $\check{\mathbf{A}}$ están dados por:
- $$\begin{aligned} a_1 &= 0, & |a_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|u_3\rangle \\ a_2 &= 6, & |a_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|u_2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|u_3\rangle \\ a_3 &= 6, & |a_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|u_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|u_3\rangle . \end{aligned}$$
- b) Si en $t = 0$ el estado del sistema está representado por el vector $|\psi\rangle = |u_3\rangle$, encuentre, para un tiempo $t > 0$, la probabilidad de obtener cada posible resultado de una medición de $\check{\mathbf{A}}$;
- c) Calcule el valor medio y la desviación estándar de $\check{\mathbf{A}}$.
6. Considere el hamiltoniano $\check{\mathbf{H}}$ y la variable dinámica $\check{\mathbf{B}}$ definidos por

$$\check{\mathbf{H}} = \hbar\omega_o \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \check{\mathbf{B}} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Suponga que a $t = 0$ la probabilidad de que la medición de $\check{\mathbf{B}}$ tenga un valor $-b$ es 1.

- a) ¿Cuál es el vector de estado a $t = 0$?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que una medición de $\check{\mathbf{B}}$ de $-b$ en cualquier tiempo t posterior?

7. Considere el hamiltoniano $\check{\mathbf{H}}$ y la variable dinámica $\check{\mathbf{B}}$ definidos por

$$\check{\mathbf{H}} = \hbar\omega_o \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \check{\mathbf{B}} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suponga que a $t = 0$ el vector de estado es

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle - |u_2\rangle).$$

- Encuentre $|\psi(t)\rangle$ para todo t .
 - Calcule el valor medio de $\check{\mathbf{B}}$ en $|\psi(t)\rangle$ y compruebe que este no depende del tiempo.
8. Sea $\check{\mathbf{H}}$ un hamiltoniano dependiente del tiempo y sea $|E_1\rangle$ y $|E_2\rangle$ dos vectores ortonormales de $\check{\mathbf{H}}$ con autovalores E_1 y E_2 . Sea $|\psi(t)\rangle$ dado por ($C_1 \neq 0 \neq C_2$):

$$|\psi(t)\rangle = C_1 e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} |E_1\rangle + C_2 e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t} |E_2\rangle$$

- Calcule la varianza de $\check{\mathbf{H}}$ en $|\psi\rangle$.
 - Muestre que $\Delta\check{\mathbf{H}} = 0$ sí y sólo sí $E_1 = E_2$.
9. Sean $\check{\mathbf{H}}$ y $\check{\mathbf{K}}$ definidos por

$$\check{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & -E \end{pmatrix}, \quad \check{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$

Suponga que en $t = 0$ el vector de estado esta dado por,

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|u_1\rangle - |u_2\rangle]$$

- Encuentre $|\psi(t)\rangle$ para cualquier tiempo t .
 - Calcule el valor medio de $\check{\mathbf{K}}$ en $|\psi(t)\rangle$ y compruebe que no depende del tiempo.
10. Encuentre cual es el valor esperado del momentum $\langle\check{\mathbf{p}}\rangle$ para una partícula en el estado

$$\psi(x, t) = A \exp(-xa^2 - \omega t) \sin(kx).$$

11. Use la relación de conmutación entre el momentum p y la posición x para obtener las ecuaciones que describen la evolución temporal de $\langle\check{\mathbf{x}}\rangle$ y $\langle\check{\mathbf{p}}\rangle$ dado por los hamiltonianos.

- $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2 x + \epsilon)$
- $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{A}{x^2}$

Resuelva estas ecuaciones para el primer Hamiltoniano.

12. Considere una partícula libre de masa m que se mueve en una dimensión, cuya posición y momentum en tiempo $t = 0$ están dados por x_0 y p_0 respectivamente.

- a) Calcule $\langle \check{\mathbf{p}} \rangle(t)$ y muestre que $\langle \check{\mathbf{p}} \rangle(t) = p_0 t^2/m + x_0$.
- b) Muestre que $d\langle \check{\mathbf{x}}^2 \rangle/dt = 2\langle \check{\mathbf{p}}\check{\mathbf{x}} \rangle/m + i\hbar/m$ y $d\langle \check{\mathbf{p}}^2 \rangle/dt = 0$.
- c) Muestre que las fluctuaciones de posición y momentum están relacionadas por $d^2(\Delta x)^2/dt^2 = 2(\Delta p)^2/m^2$ y que la solución a esta ecuación está dada por $(\Delta x)^2 = (\Delta p)_0^2 t^2/m^2 + (\Delta x)_0^2$ donde $(\Delta x)_0$ y $(\Delta p)_0$ son las fluctuaciones iniciales.

Cuadro de Heisenberg

13. Sea $x(t)$ el operador de coordenada para una partícula libre en una dimensión en el cuadro de Heisenberg. Evalúe

$$[x(t), x(0)]$$

14. Considere un paquete de onda de una partícula libre en una dimensión. En $t = 0$ esta satisface el mínimo de la relación de incerteza

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}.$$

En suma, sabemos que

$$\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0(t = 0).$$

Usando el cuadro de Heisenberg, obtenga $\langle (\Delta x)^2 \rangle_t$ como una función de $t(t \geq 0)$ cuando $\langle (\Delta x)^2 \rangle_{t=0}$ esta dado.

Misceláneos

15. La independencia lineal de dos funciones $u(x)$ y $v(x)$ está especificada en los términos del operador Wronskiano

$$\check{W}(u, v) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$$

Así, si u y v son soluciones de una ecuación lineal de segundo orden, y $W(u, v) \neq 0$ en algún intervalo, las funciones u y v son soluciones independientes en aquel intervalo. Utilizando este criterio establezca que las dos funciones $\{u, v\} = \{\cos(kx), \sin(kx)\}$ son independientes sobre todo el eje x . ¿Cual es el valor de W para este caso?

16. Considere una función de onda

$$\psi(x, t) = Ae^{i(kx + \omega t)}$$

donde k y $\omega > 0$ son reales ¿Es esta función de onda un estado cuántico permitido para una partícula libre? Si su respuesta es NO, ¿de que forma cambiaría la función dada para que describiera correctamente una partícula libre moviéndose en la dirección x ?

17. Pruebe que la densidad de probabilidad y la densidad de corriente de probabilidad en la posición r_o puede ser escrito en términos de los operadores $\check{\mathbf{r}}$ y $\check{\mathbf{p}}$ como el valor esperado de estos operadores:

$$\rho(r_o) \rightarrow \delta(r - r_o) \quad j(r_o) \rightarrow \frac{1}{2m} [p\delta(r - r_o) + \delta(r - r_o)p]$$

Derive la expresiones para las densidades en representación de momentum.