Departamento de Física—Facultad de Ciencias—U. de Chile
Primer Semestre 2010

Profesor: M. I. Molina **Ayudante**: F. González

Fisica contemporánea: Guía para la prueba #3

1. Considere una partícula de masa m encerrada en un caja de paredes duras de largo L_1, ancho L_2 y alto L_3. Calcule los autovalores de energía y las autofunciones (normalizadas) del systema. Suponga ahora que encogemos dos de las dimensiones de la caja, $L_2 \to 0, L_3 \to 0$. Se recobra el caso unidimensional? Comente.

2. Considere una partícula sin spin de masa m, sometida al potencial

$$V(x,y,z) = \begin{cases} (1/2)m\omega^2 z^2 & \text{para } 0 < x < a, 0 < y < a, -\infty < z < \infty \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

(a) Encuentre las energías permitidas para la partícula.
(b) Asumiendo que $\hbar > 5\pi^2\hbar^2/(ma^2)$, encuentre las energías y la degeneración del estado base y del primer estado excitado.

3. Encuentre la energía y la función de onda para $l = 0$ de una partícula de masa m sometida al potencial central

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{para } a < r < b \\ \infty & \text{caso contrario} \end{cases}$$

4. Calcule el valor de r al cual la densidad de probabilidad alcanza su máximo el el átomo de Hodrógeno, para los casos:
(a) $n = 1, l = 0, m = 0$.
(b) $n = 2, l = 1, m = 0$.
(c) Compare los resultados obtenidos en (a) y (b) con los radios de Bohr para órbitas circulares.

5. (a) Calcule el valor esperado $\langle r \rangle$ para el estado $|210\rangle$ del átomo de H, y compárelo con el valor de r en el cual la densidad de probabilidad radial para el estado $|210\rangle$ alcanza su máximo.
(b) Calcule el ancho de la densidad de probabilidad radial para el estado $|210\rangle$.
(*Hint*: ancho=$\sqrt{\langle 210|r^2|210\rangle - \langle 210|r|210\rangle^2}$)

6. Sean $\hat{R}$ y $\hat{P}_r$ los operadores asociados con la coordinada radial r y la componente radial del momentum p_r. Sus acciones sobre una función de onda radial $\psi(r)$ viene dados por:

$$\hat{R}\ \psi(r) = r\ \psi(r), \qquad \hat{P}_r\psi(r) = -i\hbar(1/r)(\partial/\partial r)(r\ \psi(r)).$$

Encuentre cuanto vale el conmutador $[\hat{R}, \hat{P}_r] \equiv \hat{R}\hat{P}_r - \hat{P}_r\hat{R}$.

7. Considere una partícula de masa m en presencia del potencial delta $V(\mathbf{r}) = -V_0\delta(|\mathbf{r}| - a)$, donde $V_0 > 0$. Discuta la posible existencia de estado(s) ligado(s) para este potencial para $l = 0$. Cuál es el valor mínimo de a para que exista al menos un estado ligado?

8. Un átomo de H se halla en el autoestado

$$\psi_{2,1,-1}(r,\theta,\phi) = N\ r\ e^{-r/2a_0}\ Y_{1,-1}(\theta,\phi)$$

(a) Hallar la constante de normalización, N.
(b) Cuál es la probabilidad por unidad de volumen de hallar el electrón en $r = a_0, \theta = 45^o, \phi = 60^o$?
(c) Cuál es la probabilidad por unidad de intervalo radial (dr) de hallar el electrón en $r = 2a_0$? (No olvide promediar sobre todos los ángulos).
(d) Si se efectúan las mediciones $\hat{\mathbf{L}}^2$ y $\hat{L}_z$, cuales serán las resultados?

9. Considere la función $\psi(\mathbf{r}) = -A(x + iy)\ e^{-r/2a_0}$, donde a_0 es el radio de Bohr y A es una constante real.
(a) Is $\psi(\mathbf{r})$ una autofunción de $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$? Si es así, escriba $\psi(\mathbf{r})$ en términos de $R_{nl}(r)\ Y_{lm}(\theta,\phi)$ y encuentre los valores de los números cuánticos n, l, m. Los $R_{nl}(r)$ son las funciones de onda radiales para el átomo de H.
(b) Encuentre el valor de A de modo que $\psi(\mathbf{r})$ esté normalizado.
(c) Encuentre el valor medio y el más probable de r para este estado.

10. La función de onda de un átomo tipo Hidrógeno en $t = 0$ es:

$$\Psi(\mathbf{r},0) = \frac{1}{\sqrt{11}}[\sqrt{3}\ \psi_{2,1,-1}(\mathbf{r}) - \psi_{2,1,0}(\mathbf{r}) + \sqrt{5}\ \psi_{2,1,1}(\mathbf{r}) + \sqrt{2}\ \psi_{3,1,1}(\mathbf{r})],$$

donde $\psi_{n,l,m}(\mathbf{r})$ es una autofunción normalizada (o sea, $\psi_{n,l,m}(\mathbf{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$).
(a) Escriba la función de onda para un tiempo posterior, o sea encuentre $\Psi(\mathbf{r},t)$.
(b) Si se hace una medición de la energía, que valores podrían ser hallados, y con qué probabilidades?
(c) Cuál es la probabilidad de que, al hacer una medición de L_z, hallemos $1\hbar$?

11. Considere una partícula de masa m encerrada en un pozo infinito unidimensional de ancho L, el cual es modificado por un potencial perturbativo $H_p = V_0$ para $0 \leq x \leq L/2$, y cero en caso contrario, donde se supone que $V_0 \ll 1$. Usando teoría de perturbaciones de primer orden, calcule las nuevas autoenergías.

12. Una partícula de carga e y masa m está confinada a moverse sobre un círculo de radio R. Un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}$ se aplica en el plano del círculo. Encuentre los niveles perturbados de energía hasta $O(|\mathbf{E}|^2)$.

13. Considere un oscilador armónico en una dimensión, con Hamiltoniano $H_0 = p^2/2m + (1/2)kx^2$. Ahora alteramos la constante de fuerza del oscilador, $k \to k + \delta k$, donde $\delta k \ll k$. Utilizando teoría de perturbaciones a primer orden, halle la nueva energía y función de onda del estado base del oscilador. compare con la solución exacta.

14. Considere una partícula de masa m dentro de un pozo infinito tridimensional

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < L, 0 < y < L, 0 < z < L \\ \infty & \text{fuera} \end{cases}$$

(a) Encuentre las autoenergías y autofunciones del estado base, primer estado excitado y segundo estado excitado, en forma exacta.
(b) Ahora sume la siguiente perturbación al pozo infinito:

$$H_p = V_0 \ L^3 \ \delta\left(x - \frac{L}{4}\right) \ \delta\left(y - \frac{3L}{4}\right) \delta\left(z - \frac{L}{4}\right)$$

Usando teoría de perturbaciones de primer orden, calcule la energía del estado base.
(c) Usando teoría de perturbación (degenerada) de primer orden, calcule la energía del primer estado excitado.

15. Considere una partícula de masa m rebotando verticalmente y elásticamente sobre un piso duro reflectante:

$$V(z) = \begin{cases} mgz & z > 0 \\ +\infty & z \leq 0 \end{cases}$$

Usando el método variacional, halle una estimación para la energía del estado base de la partícula. (Hint: La función de prueba $A \ ze^{-\alpha z}$ cumple con los requisitos básicos, y es un buen punto de partida).

16. Estime la energía del átomo de Hidrógeno usando el método variacional, para las siguientes funciones de prueba:
(a) $\phi(r) = (1 - (r/\alpha)), \ r \leq \alpha, \ \phi(r) = 0, \ r > \alpha.$
(b) $\phi(r) = A \ e^{-\alpha r^2}$

17. Considere un sistema de tres partículas no interactuantes confinadas dentro de un pozo infinito de ancho a. Determine la energía y función de onda del estado base, y el primer y segundo estado excitado del sistema, cuando las tres partículas son:
(a) Sin spin y distinguibles con $m_1 < m_2 < m_3$.
(b) Bosones idénticos.
(c) Fermiones idénticos de spin 1/2.
(d) Fermiones distinguibles de spin 1/2.

18. Hallar la energía y la función de onda del estado base de un sistema de N partículas no-interactuantes confinadas a un pozo infinito de ancho a unidimensional, cuando las partículas son (a) Bosones y (b) Fermiones de spin 1/2.