Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Mecánica Cuántica I
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Felipe González C.

Guía 3b

Martes 10 de Mayo de 2011

Potenciales Delta

1. Considere una partícula de masa m sujeta al potencial

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x \leqslant 0 \\ -V_0\delta(x-a) & x > 0 \end{cases}$$

donde $V_0 > 0$. Discuta la existencia de estados bases en términos del tamaño de a.

2. Considere una partícula de masa m sujeto a un potencial delta atractivo $V(x) = -V_0\delta(x)$, donde $V_0 > 0$ (V_0 tiene dimensiones de energía por distancia).

   a) En el caso de energías negativas, muestre que esta partícula sólo tiene un estado ligado; encuentre la energía de ligazón y la función de onda.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula permanezca ligada cuando V_0 es (i) reducido a la mitad repentinamente, (ii) quadruplicado repentinamente?

   c) Estudie el caso de *scattering* (i.e. $E > 0$) y calcule los coeficientes de reflexión y transmisión como función del nḿero de onda k.

   d) Encuentre el valor x_0 tal que la probabilidad de encontrar la partícula con $|x| < x_0$ sea exactamente igual a $1/2$.

3. Una partícula de masa m es sujeta a un potencial atractivo de dos deltas dado por $V(x) = -V_0(\delta(x-a) + \delta(x+a))$, donde $V_0 > 0$. Considere solamente el caso de energías negativas.

   a) Obtenga la función de onda del estado ligado.

   b) Encuentre las ecuaciones de autovalores.

   c) Especifique el número de estados ligados y el límite de sus energías. ¿Es el estado fundamental un estado par o impar?

   d) Estimar la energía del estado fundamental para el límite $a \to 0$ y $a \to \infty$

4. Un modelo que representa un átomo cerca de una pared infinita es considerar una partícula de masa m sujeta al potencial

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x \leq 0 \\ -V_0\delta(x-a) & x > 0\ , \end{cases}$$

donde $V_0 > 0$.

   a) ¿Cómo se modifica el estado ligado del potencial delta por la presencia de la pared cuando la partícula está lejos de ella? Explique, con ecuaciones, lo que significa que la partícula esté “lejos”de la pared.

   b) ¿Cuál es la condición exacta que se requiere de V_0 y d para la existencia de al menos un estado ligado?

5. Una partícula de masa m está confinada a moverse dentro de una caja de tamaño a con un muro infinito en $x = 0$ y $x = a$, en presencia de un potencial delta de magnitud $V_0 > 0$ en el punto medio. Es decir
$$V(x) = \begin{cases} V_0\delta(x - a/2) & 0 < x < a \\ \infty & \text{para el resto.} \end{cases}$$
Muestre como calcular los niveles de energía del sistema en términos de V_0, a y m. (Encontrará una ecuación trascendental).

6. Estudie la trasmisión y reflexión para una barrera de potencial de ancho l y altura V_0.

7. Considere un potencial delta unidimensional $V(x) = g\delta(x)$ y el scattering de partículas con energías $E > 0$. Sin pérdida de generalidad, suponga que las partículas inciden por la izquierda.

   a) Aplicando las condiciones de continuidad apropiadas en $x = 0$, encuentre la función de onda $\psi_E(x)$ y escríbala de la forma
   $$\psi_E(x) = \exp(ikx) + F\exp(ik|x|)$$
   donde $k \equiv \sqrt{2mE/\hbar^2}$

   b) Calcule la densidad de corriente de probabilidad y demuestre que es, en cualquier lugar, contínua.

   c) Considere el caso de acoplamiento atractivo ($g < 0$) y resuelva el problema del estado base (ligado) para $E < 0$. Encuentre la función de onda del estado base y calcule el valor de la energía del estado base.

   d) Muestre que la energía del único estado base existente corresponde a un polo del coeficiente F previamente calculado en *a)*

8. Considere un potencial unidimensional con un componente de *Heaviside* (función escalón) y una función delta atractiva justo en el borde,
$$V(x) = V\Theta(x) - \frac{\hbar^2 g}{2m}\delta(x)$$
Calcule los coeficientes de reflexión para partículas que inciden desde la izquierda con energía $E > V$. Considere el límite $E \longrightarrow \infty$. ¿Ve alguna diferencia entre la función de *Heaviside* pura y este caso? Considere el caso $E < 0$ y determine los autovalores de la energía y sus autofunciones de cualquier solución del estado base.

9. Considere un pozo cuadrado finito, unidimensional, dado por
$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| > a \\ -V_0 & |x| < a \end{cases}$$

   a) Suponga que partículas de energía $E > 0$ inciden por la izquierda. Calcule el coeficiente de transmisión $\mathcal{T}$.¿Cómo se comporta $\mathcal{T}$ para energías muy grandes? ¿Cuál es su límite a bajas energías?

   b) ¿Hay algún valor específico de energía positiva para el cuál no exista reflexión y otro para el cual el pozo sea transparente? Verifique explícitamente que para estos valores particulares la amplitud de la onda reflejada es nula.

c) Considere ahora un estado ligado ($E < 0$). Encuentre las funciones de onda de este estado ligado, así como también la ecuación que determina las autoenergías permitidas. Suponga que el pozo cuadrado es relativamente poco profundo, tal que

$$V_0 < \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2}.$$

Muestre que en este caso sólo está permitido un estado ligado, al cual le corresponde una función de onda par.

d) Suponga que la profundidad del pozo cuadrado se incrementa mientras su ancho disminuye, de tal manera que el producto $V_0 \times 2a$ permanece constante (esto es equivalente a escribir $V_0 \equiv g^2/a2$ y tomar el límite $a \longrightarrow 0$). Muestre que en este caso hay un simplemente un estado ligado y determine el valor preciso de su energía.

10. Considere una partícula que se mueve en un potencial cuadrado infinito, unidimensional, en cuyo centro hay potencial representado por una función delta. De este modo, el potencial queda representado por

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < -L \\ -\frac{\hbar^2 g^2}{2m}\delta(x) & -L < x < L \\ \infty & x > L \end{cases}$$

a) Encuentre los autovalores para energías positivas ($E > 0$).

b) Encuentre los autovalores para energías negativas ($E < 0$).

c) Considere ahora el mismo problema pero con el signo del acoplamiento invertido, *i.e.* el caso de una función delta repulsiva en el centro de un pozo cuadrada infinito.¿Cuál es el espectro?

11. Estudie los autovalores y autofunciones de una partícula sometida al potencial

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{N} V_0\, \delta(x - n\Delta) & 0 \leqslant x \leqslant L \\ \infty & L < x \end{cases}$$

donde $\Delta = \frac{L}{N+1}$ y $V_0 > 0$. Este potencial representa al pozo infinito "relleno" con N *deltas* distribuídas uniformemente.

a) ¿Cuántos estados ligados existen? ¿Cuáles son sus energías?

b) ¿Qué sucede para N muy grande?

c) Reponda estas preguntas para el caso $V_0 < 0$, considerando que, en este caso, existe solución tanto para $E > 0$ como para $E < 0$.

Hint: Haga primero los casos $N = 1$, $N = 2$ y $N = 3$. Luego haga el caso para un N arbitrario.