Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Mecánica Cuántica I
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Felipe González C.

Guía 4

Martes 24 de Mayo de 2011 Tarea: **16, 18**, Entrega: Jueves 2 de Junio de 2011

Oscilador Armónico

1. Utilizando el principio de incerteza, muestre que la energía más baja de un oscilador es $\hbar\omega/2$.

2. Utilizando la regla de cuantización de Bohr-Sommerfeld, obtenga los niveles de energía para el oscilador armónico. Note que de acuerdo a esta regla la energía del estado fundamental da cero, lo cual ciertamente está errado.

3. Considere la el oscilador armónico en representación de coordenadas y resuelva explicitamente la ecuación de Schrodinger, encontrando E_n y su correspondiente $\psi_n(x)$. Para ello, proceda de acuerdo a los siguientes pasos:
   - exprese la ecuación en forma adimensional
   - determine el comportamiento asintótico de $\psi \longrightarrow \pm\infty$
   - concluya que una solución posible es de la forma $\psi(y) = N_n \exp(-y^2/2)\phi(y)$ y encuentre la ecuación para ϕ, así como las condiciones que debe cumplir para $y \longrightarrow \pm\infty$
   - solucione esta última ecuación mediante el método de serie de potencias. Muestre que ψ cumple con las condiciones asintóticas cuando ϕ toma la forma de un polinomio, lo cual exige que la energía quede cuantizada.
   - obtenga los polinomios para $n = 0, 1$ y 2. Confirme que son equivalente a los polinomios de Hermite.
   - escriba finalmente E_n y $\psi_n(x)$.

4. Considere el Hamiltoniano adimensional $\check{\mathbf{H}} = \frac{1}{2}\check{\mathbf{p}} + \frac{1}{2}\check{\mathbf{x}}^2$, con $\check{\mathbf{p}} = -i\frac{d}{dx}$.

   a) Muestre que las funciones de onda $\psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}e^{-x^2/2}$ y $\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}}xe^{-x^2/2}$ son autofunciones de $\check{\mathbf{H}}$ con autovalores $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$, respectivamente.

   b) Encuentre α y β tales que
   $$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}}\left(\alpha x^2 - 1)e^{-x^2/2}\right), \qquad \psi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{6\sqrt{\pi}}}x\left(1+\beta x^2\right)e^{-x^2/2}$$
   sean ortogonales a ψ_0. Luego, muestre que ψ_2 y ψ_3 son autofunciones de $\check{\mathbf{H}}$ con autovalores $\frac{5}{2}$ y $\frac{7}{2}$, respectivamente.

   c) Calcule $\Delta\check{\mathbf{x}}_n\Delta\check{\mathbf{p}}_n$ para $n = 0$ y $n = 1$.

   d) Calcule $\check{\mathbf{a}}^\dagger|\psi_0\rangle$, $\check{\mathbf{a}}|\psi_0\rangle$, $\check{\mathbf{a}}^\dagger|\psi_1\rangle$, $\check{\mathbf{a}}|\psi_1\rangle$ y $\check{\mathbf{a}}|\psi_2\rangle$, donde $\check{\mathbf{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\check{\mathbf{x}} + i\frac{d}{dx}\right)$ y $\check{\mathbf{a}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\check{\mathbf{x}} - i\frac{d}{dx}\right)$.

5. Considere un oscilador armónico en una dimensión y los operadores de subida y bajada $\check{\mathbf{a}}^\dagger$ y $\check{\mathbf{a}}$, respectivamente.

   a) Evalúe i) $\langle m|\check{\mathbf{x}}|n\rangle$, ii) $\langle m|\check{\mathbf{x}}^2|n\rangle$, iii) $\langle m|\check{\mathbf{p}}|n\rangle$, iv) $\langle m|\check{\mathbf{p}}^2|n\rangle$, v) $\langle m|[\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{p}}]|n\rangle$, vi) $\langle m|\{\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{p}}\}_+|n\rangle$, donde $\{\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{p}}\}_+ = \check{\mathbf{x}}\check{\mathbf{p}} + \check{\mathbf{p}}\check{\mathbf{x}}$ y es el *anticonmutador* de $\check{\mathbf{x}}$ y $\check{\mathbf{p}}$.

b) Compruebe que el teorema del virial se cumple al tomar los promedios sobre autoestados de energía.

c) Deduzca que $\Delta\check{\mathbf{x}}\Delta\check{\mathbf{p}} = (\hbar/2)(2n+1)$

6. Demuestre que i) $\langle 1|(\check{\mathbf{a}} - \check{\mathbf{a}}^\dagger)^3|0\rangle = 3$, ii) $\langle 0|(\check{\mathbf{a}} + \check{\mathbf{a}}^\dagger)^4|0\rangle = 3$, iii) $\langle 2|(\check{\mathbf{a}} + \check{\mathbf{a}}^\dagger)^3|1\rangle = 6\sqrt{2}$. Encuentre iv) $\langle 0|(\check{\mathbf{a}} + \check{\mathbf{a}}^\dagger)^5|0\rangle$, v) $\langle m|\check{\mathbf{x}}^3|n\rangle$, vi) $\langle m|\check{\mathbf{x}}^4|n\rangle$

7. Considere el siguiente hamiltoniano: $\check{\mathbf{H}} = a\check{\boldsymbol{\eta}}^\dagger\check{\boldsymbol{\eta}} + b(\check{\boldsymbol{\eta}} + \check{\boldsymbol{\eta}}^\dagger)$ donde $\check{\boldsymbol{\eta}}^\dagger\check{\boldsymbol{\eta}}|n\rangle = n|n\rangle$ y $[\check{\boldsymbol{\eta}}, \check{\boldsymbol{\eta}}^\dagger] = 1$.

   a) Diagonalice $\check{\mathbf{H}}$. Para ello defina $\check{\mathbf{c}}^\dagger = \check{\boldsymbol{\eta}}^\dagger + \alpha\check{\mathbf{I}}$, $\check{\mathbf{c}} = \check{\boldsymbol{\eta}} + \alpha\check{\mathbf{I}}$ y α un número real.

   b) Encuentre $[\check{\mathbf{c}}, \check{\mathbf{c}}^\dagger]$.

   c) Encuentre los valores y vectores propios.

   d) Aplique el caso anterior al caso de un oscilador armónico con una carga $(-q)$ en presencia de un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}$.

8. Demuestre que en un oscilador armónico clásico la probabilidad de encontrar una partícula entre x y $x + dx$ es

$$\mathcal{P}_{\text{clas}}(x)dx = \frac{1}{\pi a}\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{-1/2} dx, \quad \text{con } |x| \leq a.$$

   Compare esta expresión con la que se obtiene en el caso de la Mecánica Cuántica con $n = 1$. Discuta.

9. Encuentre el espectro de energías y las autofunciones para el sistema cuyo potencial es

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2x^2 & x > 0 \end{cases}$$

10. Determine el espectro de energía para un oscilador armónico espacial

$$V(x) = \frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2 + \omega_2^2y^2 + \omega_3^2z^2).$$

   ¿Cuál es el grado de degeneración del n-ésimo nivel si $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$?

11. Utilice la función generatriz de los polinomios de Hermite para evaluar

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n(x)x^2u_m(x)\,dx$$

   donde los u_n son las autofunciones normalizadas del oscilador armónico.

12. Considere un oscilador armónico unidimensional.

   a) Construya una combinación lineal de $|0\rangle$ y $|1\rangle$ tal que $\langle\check{\mathbf{x}}\rangle$ sea lo más grande posible.

   b) Suponga que el oscilador está en el estado construido en (a) en $t = 0$. ¿Cuál es el vector de estado para $t > 0$ en el cuadro de Schrödinger?

   c) Evalue $\langle\check{\mathbf{x}}\rangle_t$ y $\left\langle(\Delta\check{\mathbf{x}})^2\right\rangle_t$.

13. Un estado coherente $|\lambda\rangle$ para un oscilador armónico 1–dimensional se define como un estado tal que sea autoestado del operador (no hermítico) de aniquilación

$$\check{\mathbf{a}}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle,$$

   con $\lambda \in \mathbb{C}$.

a) Demuestre que

$$|\lambda\rangle = \exp(\lambda \check{\mathbf{a}}^\dagger - \lambda^* \check{\mathbf{a}})|0\rangle$$

es un estado coherente normalizado.

b) Pruebe que

$$\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\check{\mathbf{H}}}|\lambda\rangle = \mathrm{e}^{-i\omega t}|\lambda\rangle$$

14. Considere el operador $\check{\mathbf{A}}(\alpha)$ dado por $\check{\mathbf{A}}(\alpha) = e^{\alpha\check{\mathbf{a}}^\dagger - \alpha^*\check{\mathbf{a}}}$, donde $\check{\mathbf{a}}^\dagger$, $\check{\mathbf{a}}$ son los operadores de subida y bajada del oscilador armónico. Demuestre que:

    a) $|\alpha\rangle = \check{\mathbf{A}}|0\rangle$ donde $|\alpha\rangle$ es un estado coherente y $|0\rangle$ es el estado fundamental del oscilador armónico

    b) $\check{\mathbf{A}}^\dagger(\alpha) = \check{\mathbf{A}}(-\alpha)$

    c) $\check{\mathbf{A}}(\alpha)$ es unitario

    d) $\check{\mathbf{A}}(-\alpha)\check{\mathbf{A}}(\alpha) = \check{\mathbf{A}}^\dagger(\alpha)\check{\mathbf{A}}^\dagger(-\alpha) = \check{\mathbf{1}}$

    e) $\check{\mathbf{A}}^\dagger(\alpha)\check{\mathbf{a}}\check{\mathbf{A}}(\alpha) = \check{\mathbf{a}} + \alpha\check{\mathbf{1}}$

15. Demuestre las siguientes relaciones, donde $\check{\boldsymbol{\xi}} = \check{\mathbf{x}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$, $\check{\boldsymbol{\pi}} = \check{\mathbf{p}}\frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}$ y los promedios son tomados con respecto a un estado coherente $|\alpha(t)\rangle$

    a) $\left\langle \check{\boldsymbol{\xi}}^2 \right\rangle_t = \frac{1}{2}(\alpha^2 e^{2i\omega t} + \alpha^{*2}e^{-2i\omega t} + 2|\alpha|^2 + 1)$

    b) $\left\langle \check{\boldsymbol{\pi}}^2 \right\rangle_t = -\frac{1}{2}(\alpha^2 e^{2i\omega t} + \alpha^{*2}e^{-2i\omega t} - 2|\alpha|^2 - 1)$

    c) $(\Delta\check{\boldsymbol{\xi}})^2 = (\Delta\check{\boldsymbol{\pi}})^2 = \frac{1}{2}$. Comente.

16. Considere una particula de masa m y carga q que se mueve en presencia de un campo magnético

    a) Demuestre que el operador de velocidad satisface las relaciones de conmutacion

    $$[\check{\mathbf{v}}_k, \check{\mathbf{v}}_j] = \frac{iq\hbar}{m^2 c}\epsilon_{kjl}\check{\mathbf{B}}_l.$$

    b) Encuentre el espectro de energías de una partícula en un campo magnético uniforme.

17. Considere una partícula moviéndose en un potencial armónico unidimensional, en presencia de una interacción tipo dipolar, es decir,

    $$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{\hbar}{2m}\frac{\alpha}{x^2}$$

    donde α es un parámetro que caracteriza la intensidad del campo dipolar externo. Si $\alpha > 0$ el potencial es atractivo y si $\alpha < 0$ el potencial es repulsivo. Encuentre los autovalores y las autofunciones de para este potencial. Puede guiarse por el artículo de G.Palma y U. Raff, Am. J. Phys. **71**, 247 (2003) (ver web gg).

18. Encuentre una forma alternativa de solucionar el oscilador armónico, basada en transformadas de Fourier. Para ello, estudie el artículo de S. A Ponomarenko, Am. J. Phys. **72** 1259 (2004).

19. Considere un oscilador cargado, de carga positiva q y masa m, el cual está sujeto a un campo eléctrico $E_0\cos(\omega t)$; el hamiltoniano de la partícula es $\check{\mathbf{H}} = \check{\mathbf{P}}^2/(2m) + k\check{\mathbf{X}}^2/2 + qE_0\check{\mathbf{X}}\cos(\omega t)$.

    a) Calcule $d\langle\check{\mathbf{X}}\rangle/dt, d\langle\check{\mathbf{P}}\rangle/dt, d\langle\check{\mathbf{H}}\rangle/dt$.

    b) Resuelva la ecuación $d\langle\check{\mathbf{X}}\rangle/dt$ y obtenga $\langle\check{\mathbf{X}}\rangle(t)$ donde $\langle\check{\mathbf{X}}\rangle(0) = x_0$

20. Encuentre los nieveles de energía y las autofunciones de un sistema de dos osciladores armónicos de masas m_1 y m_2, con idéntica frecuencia ω, acoplados por la interacción $\frac{1}{2}k(\check{\mathbf{x}}_1 - \check{\mathbf{x}}_2)^2$.