Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Mecánica Cuántica I
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Felipe González C.

Guía 4b

Sábado 18 de Junio de 2011

Más Oscilador Armónico

1. Obtener la representación matricial de los operadores $\check{\mathbf{a}}$, $\check{\mathbf{a}}^\dagger$, $\check{\mathbf{x}}$ y $\check{\mathbf{p}}$ en la base de los autoestados del oscilador armónico.

2. Calcule $\Delta\check{\mathbf{x}}$ y $\Delta\check{\mathbf{p}}$ para un autoestado $|n\rangle$ del oscilador, y demuestre que su multiplicación es mayor que $\hbar/2$. Muestre además que se cumple la equipartición de energía: $\frac{1}{2}\left\langle\check{\mathbf{H}}\right\rangle = \left\langle\check{\mathbf{K}}\right\rangle = \left\langle\check{\mathbf{V}}\right\rangle$, donde $\check{\mathbf{K}} = \frac{\check{\mathbf{p}}^2}{2m}$ y $\check{\mathbf{V}} = \frac{1}{2}m\omega^2\check{\mathbf{x}}^2$ son los operadores de energía cinética y potencial, respectivamente.

3. Calcule la probabilidad de encontrar una partícula en la región clásicamente prohibida de un oscilador armónico para los estados $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

4. Encuentre los niveles de energía y funciones de onda de dos osciladores armónicos, de masas m_1 y m_2, que tienen la misma frecuencia ω y están acoplados por la interacción $\frac{1}{2}k(\check{\mathbf{x}}_1 - \check{\mathbf{x}}_2)^2$.

5. Considere una partícula de masa m que está rebotando vertical y elásticamente contra el suelo bajo el campo gravitacional terrestre
$$V(z) = \begin{cases} mgz & z > 0 \\ \infty & z \leqslant 0 \end{cases}.$$
   a) Encuentre los niveles de energía y las funciones de onda de la partícula.
   b) Encuentre el coeficiente de transmisión.

6. Una bola de masa $m = 0{,}1$ kg está rebotando sobre una mesa ubicada en $z = 0$. El potencial al cual la bola está sometida es
$$V(z) = \begin{cases} mgz & z > 0 \\ 0 & z \leqslant 0 \end{cases},$$
donde $V_0 = 1$ J y g es la aceleración de gravedad terrestre.
   a) Describa el espectro de energías posibles (continuas, discretas, inexistentes, etc), a medida que E aumenta desde valores muy negativos a valores positivos.
   b) Estime el orden de magnitud de la energía del estado base.
   c) Esboce las funciones de onda $\psi(z)$ correspondientes a los dos estados más bajos en energía.

7. En tiempo $t = 0$, una partícula atada a un resorte está en el estado $\psi(x,0) = (\pi\sigma^2)^{-1/4}e^{-x^2/2\sigma^2}$. ¿Cuál es la probabilidad que una medición de la energía en $t = 0$ entregue el valor $E_0 = \hbar\omega/2$? ¿Y para $t > 0$?

8. En tiempo $t = 0$ la función de onda de un oscilador armónico es $\psi(x,0) = \sqrt{\frac{1}{3}}\psi_0(x) + \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_2(x)$.
   a) Encuentre $\psi(x,t)$ para $t > 0$.
   b) ¿Cuál es la paridad de este estado? ¿Cambia con el tiempo?
   c) ¿Cuál es valor promedio de la energía para este estado? ¿Cambia con el tiempo?
   d) Encuentre la posición promedio en este estado.

9. Considere un oscilador armónico simple en una dimension. El estado base se puede escribir como $\Psi(x,t=0) = Ne^{-\alpha^2 x^2/2} = \Psi_0(x)$.

   a) Encuentre las constantes α, N y el valor de la energía del estado Ψ_0, E_0.

   b) Si en $t=0$ se aplica un campo eléctrico constante al sistema, ¿cuál es el nuevo estado base del sistema?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que, después de aplicado el campo eléctrico, la partícula siga en el estado base?

10. Considere una partícula que se mueve en una dimensión. La partícula está inicialmente acoplada a dos resortes idénticos, cada uno con constante de resorte k. Los resortes están sujetos simétricamente a los puntos $x = \pm a$, de manera que cuando la partícula está en $x = 0$ la fuerza clásica sobre la partícula es cero.

    a) ¿Cuáles son los autovalores de la partícula mientras está atada a ambos resortes?

    b) ¿Cuál es la función de onda del estado base?

    c) Uno de los resortes es repentinamente cortado, dejando a la partícula atada sólo al otro. Si la partícula está en el estado base antes de que el resorte se corte, ¿cuál es la probabilidad de que siga estando en el estado base?