Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudantes: Felipe González
Humberto Loguercio

Mecánica II

Guía 6: Relatividad Especial

Lu. 21 dic. 2015

Tarea: Problemas: 1, 4, 6, 8, 12, 20. Entrega: Lu. 28 dic.

Cinemática Relativista

1. Una nave espacial (sistema referencia S') pasa frente a un observador en tierra (sistema referencia S) a la velocidad $v = 0,6c$. Los dos sistemas sincronizan sus relojes en $x = x' = 0$ cuando leen $t = t' = 0$ al pasar una frente al otro (llamamos esto evento 1). Al cabo de diez minutos, medido por el reloj en tierra, se emite un pulso de luz hacia la nave espacial (evento 2). Después, el pulso de luz es detectado en la nave espacial (evento 3).

   a) ¿Es el intervalo entre los eventos 1 y 2 un intervalo de tiempo propio en la nave espacial? ¿en la tierra?

   b) ¿Es el intervalo entre los eventos 2 y 3 un intervalo de tiempo propio en la nave espacial? ¿en la tierra?

   c) ¿Es el intervalo entre los eventos 1 y 2 un intervalo de tiempo propio en la nave espacial? ¿en la tierra?

   d) ¿Cuál es el tiempo del evento 2 medido por la nave espacial?

   e) De acuerdo a la nave, ¿cuán lejos esta la tierra cuando se emite el pulso de luz?

   f) A partir de sus respuestas de la parte (d) y (e), ¿qué tiempo marca el reloj de la nave cuando le llega la luz?

   g) Encuentre el tiempo del evento 3 de acuerdo al reloj en tierra, analizando todo desde la perspectiva de la tierra.

   h) Son sus conclusiones de la parte (f) y (g) coherentes con sus conclusiones de las partes (a), (b) y (c)?

2. ¿Cuán rápido se mueve una regla de 2 m si se observa que tiene una longitud de 1 m?

   R: $\frac{\sqrt{3}}{2}\,c$.

3. Un sistema S' situado al centro de un vagón de tren observa que dos hombres separados por una distancia de 25 m, cada uno en un extremo del vagón, prenden un cigarrillo simultáneamente. Un observador S que se encuentra de pie en el andén mira pasar el vagón a una velocidad $v = 20\ m/s$ y si suponemos que es capaz de tomar medidas precisas, constata que el hombre en la parte trasera del vagón enciende su cigarrillo un poco antes que el individuo del frente. Determine esta diferencia de tiempo para el observador S.

   R: $t_2 - t_1 = 5{,}6 \times 10^{-15} s$.

4. Un observador O tiene una máquina fotográfica que es activada por contacto en el extremo delantero de un cohete de largo propio L_0, que se acerca a la máquina fotográfica a ras de suelo con velocidad v_0. Al revelar la foto se observa un niño en el extremo posterior del cohete, dejando una marca en el suelo.
   Para el observador O, ¿cuál es la distancia entre la marca y la máquina fotográfica?

   R: $x = L_0\sqrt{\frac{c+v_0}{c-v_0}}$.

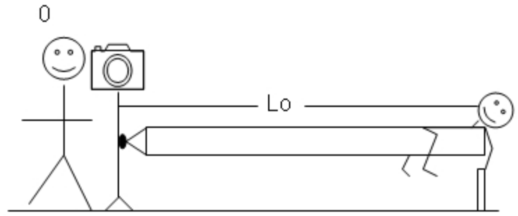

Figura 1:

5. Un mesón K^0 en reposo se desintegra dando lugar a un mesón π^+ y uno π^- cada uno con velocidad 0,85c (ver figura 2).
Al desintegrarse un mesón K^0 que marcha a una velocidad de 0,9c, ¿Cuál es la máxima velocidad que puede alcanzar uno de los mesones π? ,¿y la mínima?

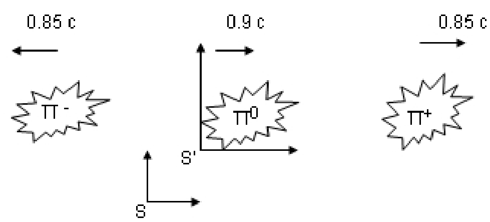

Figura 2:

R: $u_{min} = u_- = 0{,}21c, \quad u_{max} = u_+ = 0{,}99c.$

6. *Invariante de Lorentz.* Compruebe a partir de las transformaciones de Lorentz

$$x' = \gamma(x - \beta ct);\ y' = y;\ z' = z;\ t' = \gamma\left(t - \beta\frac{x}{c}\right) \tag{1}$$

que se cumple

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2.$$

7. *Transformación de Lorentz.* Usando (1), demuestre que

$$x = \gamma(x' + \beta ct');\ y = y';\ z = z';\ t = \gamma\left(t' + \beta\frac{x'}{c}\right)$$

8. *Cambio de volumen.* Demostrar que si L_0^3 es el volumen de un cubo en reposo, entonces

$$L_0^3(1 - \beta^2)^{1/2}$$

es el volumen observado desde un sistema de referencia que se mueve con velocidad uniforme $v = \beta c$ en una dirección paralela a una arista del cubo.

9. *Simultaneidad.* Demostrar a partir de la transformación de Lorentz que dos sucesos simultáneos ($t_1 = t_2$) en posiciones diferentes ($x_1 \neq x_2$)) en el sistema de referencia S no son simultáneos en general en el sistema de referencia S'.

10. *Suma de velocidades.* Demostrar que si en el sistema S' se cumple $v'_y = c\sin\phi$ y $v'_z = c\cos\phi$, entonces en el sistema S

$$v_y^2 + v_z^2 = c^2.$$

El sistema S' se mueve con velocidad $V\hat{\mathbf{x}}$ respecto al sistema S.

11. *Mesones* π^+

    a) ¿Cuál es la vida media de un grupo de mesones π^+ moviéndose con $\beta = 0{,}73$? (El tiempo de vida propio es de $\tau = 2{,}5 \times 10^{-8} s$).

    R: $3{,}6 \times 10^{-8}$ s.

    b) ¿Qué distancia se recorre con $\beta = 0{,}73$ durante una vida media?

    R: 800 cm.

    c) ¿Qué distancia se recorrería sin efectos relativistas?

    R: 500 cm.

    d) Responder las partes *a*), *b*) y *c*) de nuevo para $\beta = 0{,}99$.

12. *Mesones* μ La vida media propia de los mesones μ es aproximadamente 2×10^6 s. Supóngase que un gran grupo de mesones μ, producidos a cierta altura de la atmósfera, se mueven hacia abajo con velocidad $v = 0{,}99c$. El número de colisiones en la atmósfera durante su descenso es pequeño. Si el 1 por ciento de los que existían en el grupo original sobreviven y alcanzan la superficie terrestrem estimar la altura original. (En el sistema de referencia de los mesones μ el número de partículas que sobreviven al cabo de un tiempo t, viene dado por $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$).

    R: 2×10^6 cm.

13. *Dos sucesos (o eventos)* Considerare dos sistemas inerciales S y S'. Supongamos que S' se mueve con velocidad $V\hat{\mathbf{x}}$ respecto a S. En un punto x'_1 tiene lugar un suceso en el tiempo t'_1. En x'_2 se verifica otro en el instante t'_2. Los orígenes coinciden en el tiempo $t = t' = 0$. Encontrar los tiempos y distancias correspondientes en S.

14. *Mesones* π^+. Un grupo de 10^4 mesones π^+ se mueven en una trayectoria circular de radio 20 m a una velocidad $v = 0{,}99c$. La vida media propia del mesón π^+ es $2{,}5 \times 10^{-8}$ s.

    a) ¿Cuántos sobrevivirán cuando el grupo retorne a su punto de partida?

    b) ¿Cuántos mesones quedarán en un grupo que hubiese quedado en reposo en el origen durante este mismo periodo de tiempo?

15. *Velocidad de retroceso de una galaxia.* Los datos sobre el corrimiento hacia el rojo dan una velocidad de alejamiento proporcional a la distancia (ver cap. 10, Mecánica, Charles Kittel), en la región no relativista

$$V = \alpha r; \quad \alpha \approx 3 \times 10^{-18} s^{-1}.$$

Calcular la velocidad de retroceso de una galaxia a una distancia de 3×10^9 años luz. ¿Es relativista esta velocidad?

R: $8{,}5 \times 10^9$ cm/s.

16. *Velocidades galácticas.* Observamos una galaxia a una distancia retrocediendo en un sentido determinado a una velocidad $V = 0{,}3c$, y otra retrocediendo en sentido contrario con la misma velocidad. ¿Qué velocidad de alejamiento de una de las galaxias apreciará un observador situado en la otra?

17. *Simultaneidad.* Consideremos las fuentes de dos sucesos que están situadas en reposo en los puntos A y B a igual distancia del observador O en el sistema S. Supóngase que en el instante particular de tiempo (determinado por el observador O en S) en el que se producen ambos sucesos, un segundo observador O' y su sistema de referencia asociado S', moviéndose con una velocidad $V\hat{\mathbf{x}}$ respecto a S, conicide con O y su sistema S.

    a) Suponer $V/c = 1/3$. Dibujar las posiciones de los dos sistemas y los puntos A, A', B, B', cuando la señal B' llega al observador O'. ¿Ha llegado esta señal al observador O? ¿Por qué?

    b) Dibujar las posiciones de S y S' cuando ambas señales lleguen a O.

    c) Dibujar las posiciones de S y S' cuando la señal de A' llegue a O'.

    d) Suponer que los dos sucesos se registran físicamente en los puntos A' y B'; por ejemplo, sobre placas fotográficas. Demostrar, de acuerdo con las hipótesis de este problema, que las distancias $A'O'$ y $B'O'$ son iguales.

    e) Demostrar que los dos sucesos no son simultáneos cuando se observan desde O'. La constancia de la velocidad de la luz en todas circunstancias está implícitamente supuesta en la definición de simultaneidad. Para aclarar esta dependencia, consideremos que los dos sucesos A y B son la radiación simultánea de pulsos sonoros, según aprecia en O un observador en reposo respecto al medio en el que se propaga el sonido. Sea O' un observador moviéndose con una velocidad V igual a un tercio de la del sonido.

    f) Utilizar la transformación galileana para demostrar que las velocidades de los pulsos sonoros hacia O' desde A' y B' no son las mismas.

    g) Demostrar que, aun en el caso de que las dos señales lleguen a O' en instantes diferentes, como los pulsos han viajado con diferentes velocidades, se compensa este hecho y los dos sucesos parecen simultáneos incluso para el observador O'.

18. *Efecto Doppler Relativista.* Se aceleran protones a través de un potencial de 20 kV y a continuación se desvían con velocidad constante hacia una región en donde tiene lugar su neutralización formándose átomos H emitiendo luz. La emisión H_β ($\lambda = 4861{,}33$ Å para un átomo en reposo) se observa en un espectrómetro. El eje óptico del mismo es paralelo al movimiento de los iones. El espectro presenta un corrimiento Doppler debido al movimiento de los iones en la dirección de la emisión observada. El aparato contiene también un espejo colocado de modo que permita la superposición del espectro de luz emitida en sentido contrario. Recuérdese que 1 Å $\equiv 10^{-8}$ cm.

    a) ¿Cuál es la velocidad de los protones después de la aceleración? R: 2×10^8 cm/s.

    b) Calcular los corrimientos Doppler de primer orden, dependientes de v/c, adecuados para los sentidos hacia adelante y hacia atrás e indicar el aspecto de la parte principal del espectro sobre un diagrama.

    c) Considerar ahora el efecto de segundo orden, en v^2/c^2, que surge de consideraciones relativistas. Demostrar que el corrimiento de segundo orden es $\approx \frac{1}{2}\lambda(v^2/c^2)$, y calcularlo numéricamente para este problema. Obsérvese que es el mismo tanto para el movimiento con $+\mathbf{v}$ como para con $-\mathbf{v}$.

19. Muestre que la ecuación de ondas

    $$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

    es invariante ante la transformación de Lorentz, pero no ante la transformación de Galileo.

    Para simplificar el problema, considere sólo la ecuación de ondas en una dimensión, o sea

    $$\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

20. Es sabido que la frecuencia de la luz que se refleja desde de un espejo móvil sufre corrimiento Doppler debido al movimiento de la imagen. Encuentre el corrimiento Doppler de la luz reflejado directamente de un espejo que se acerca al observador con velocidad v, y muestre que es igual a como si la imagen se estuviera moviendo hacia el observador a velocidad $2v/(1 + v^2/c^2)$.