Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Mecánica Cuántica I
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Felipe González C.

Solución Tarea 1

1. Tenemos el operador $\check{\mathbf{K}} = |\phi\rangle\langle\psi|$. Para que $\check{\mathbf{K}}$ sea autohermítico, se debe cumplir que

$$\check{\mathbf{K}} = |\phi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\phi| = \check{\mathbf{K}}^{\dagger}.$$

Aplicando $|\phi\rangle$ a ambos lados, obtenemos

$$|\phi\rangle\langle\psi|\phi\rangle = |\psi\rangle\langle\phi|\phi\rangle$$

de donde se obtiene que

$$|\phi\rangle = \frac{\langle\phi|\phi\rangle}{\langle\psi|\phi\rangle}|\psi\rangle,$$

es decir, ambos vectores deben ser colineales (uno es múltiplo del otro).

Para que $\check{\mathbf{K}}$ sea un proyector, se debe cumplir que

$$\check{\mathbf{K}}^2 = |\phi\rangle\langle\psi|\phi\rangle\langle\psi| = \check{\mathbf{K}},$$

por lo tanto, se requiere que $\langle\psi|\phi\rangle = 1$.

Finalmente, $\check{\mathbf{K}}$ se puede escribir como la multiplicación de dos proyectores en la forma $\check{\mathbf{K}} = \lambda\check{\mathbf{P}}_1\check{\mathbf{P}}_2$ si consideramos

$$\check{\mathbf{P}}_1 = \frac{1}{\langle\phi|\phi\rangle}|\phi\rangle\langle\phi|,$$

$$\check{\mathbf{P}}_2 = \frac{1}{\langle\psi|\psi\rangle}|\psi\rangle\langle\psi|,$$

$$\lambda = \frac{\langle\phi|\phi\rangle\langle\psi|\psi\rangle}{\langle\phi|\psi\rangle}.$$

Claramente $\check{\mathbf{P}}_1$ y $\check{\mathbf{P}}_2$ son operadores de proyección, y

$$\begin{aligned}
\check{\mathbf{K}} &= \lambda\check{\mathbf{P}}_1\check{\mathbf{P}}_2 \\
&= \lambda\left[\frac{1}{\langle\phi|\phi\rangle}|\phi\rangle\langle\phi|\right]\left[\frac{1}{\langle\psi|\psi\rangle}|\psi\rangle\langle\psi|\right] \\
&= \frac{\langle\phi|\phi\rangle\langle\psi|\psi\rangle}{\langle\phi|\psi\rangle}\frac{1}{\langle\phi|\phi\rangle\langle\psi|\psi\rangle}|\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle\langle\psi| \\
&= |\phi\rangle\langle\psi|.
\end{aligned}$$

2. Queremos demostrar que $e^{i\alpha\check{\sigma}_x} = \check{\mathbf{I}}\cos(\alpha) + i\sin\alpha\check{\sigma}_x$. Para ello, notamos que

$$\check{\sigma}_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \check{\mathbf{I}}.$$

Con esto,

$$\begin{aligned}
e^{i\alpha\check{\sigma}_x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha\check{\sigma}_x)^n}{n!} \\
&= \check{\mathbf{I}} + \frac{(i\alpha\check{\sigma}_x)}{1!} + \frac{(i\alpha\check{\sigma}_x)^2}{2!} + \frac{(i\alpha\check{\sigma}_x)^3}{3!} + \cdots \\
&= \check{\mathbf{I}} + \frac{i\alpha}{1!}\check{\sigma}_x + \frac{(i\alpha)^2}{2!}\check{\mathbf{I}} + \frac{(i\alpha)^3}{3!}\check{\sigma}_x + \frac{(i\alpha)^4}{4!}\check{\mathbf{I}} + \frac{(i\alpha)^5}{5!}\check{\sigma}_x + \cdots \\
&= \check{\mathbf{I}}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \cdots\right) + \check{\sigma}_x\left(\frac{i\alpha}{1!} - \frac{i\alpha^3}{3!} + \frac{i\alpha^5}{5!} - \cdots\right) \\
&= \check{\mathbf{I}}\cos(\alpha) + i\check{\sigma}_x\sin(\alpha).
\end{aligned}$$