Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Mecanica Cuantica I
Profesor: Miguel Kiwi
Ayudante: Felipe González C.

Tarea 1

27 de Marzo de 2013

Entrega: 10 de abril de 2013

1. Considere una partícula cuyo Hamiltoniano H es:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \alpha\delta(x),$$

donde α es una constante.

a) Integre la ecuación de autovalores de H entre $-\epsilon$ y ϵ. Haciendo que ϵ tienda a 0, muestre que la derivada de la auto-función $\varphi(x)$ presenta una discontinuidad en $x = 0$ y encuéntrela en términos de α, m y $\varphi(0)$.

b) Asuma que la energía E de la partícula es negativa (estado ligado). Muestre que $\varphi(x)$ puede ser escrito como

$$\varphi(x) = \begin{cases} A_1 e^{\rho x} + A_1' e^{-\rho x} & \text{si } x < 0 \\ A_2 e^{\rho x} + A_2' e^{-\rho x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exprese la constante ρ en términos de E y m. Calcule la matriz M definida por:

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ A_2' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_1 \\ A_1' \end{pmatrix}$$

Entonces, usando la condición de que $\varphi(x)$ debe ser de cuadrado integrable, encuentre los posibles valores de la energía. Calcule las correspondientes funciones de onda normalizadas.

c) Muestre las funciones de onda gráficamente y dé un orden de magnitud para su ancho Δx.

d) ¿Cual es la probabilidad $d\mathcal{P}(p)$ de que en una medición del momentum de la partícula, en uno de los estados estacionarios calculados, dé un resultado entre p y $p + dp$?. ¿Para qué valor de p, es esta probabilidad máxima?. ¿En que dominio, de dimensión Δp, $d\mathcal{P}(p)$ toma valores no despreciables? Dé un orden de magnitud para el producto $\Delta x \Delta p$.

2. Considere una partícula colocada bajo el mismo potencial que en el ejercicio anterior, la partícula ahora se desplaza de izquierda a derecha a lo largo del eje x con una energía $E > 0$.

a) Muestre que un estado estacionario de la partícula puede ser escrito:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Ae^{-ikx} & \text{si } x < 0 \\ Be^{ikx} & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

donde k, A y B, son constantes que deben ser calculadas en términos de E, m y α (cuidado con la discontinuidad de $d\varphi/dx$ en $x = 0$).

b) Fije $-E_L = -m\alpha^2/2\hbar^2 < 0$ (energía del estado ligado de la partícula). Calcule, en términos del parámetro adimensional E/E_L, el coeficiente de reflexión R y el coeficiente de transmisión T de la barrera. Estudie sus variaciones respecto a E; ¿qué pasa cuando $E \to \infty$?, ¿Cómo se puede interpretar esto? Muestre que si la expresión para T se extiende para valores negativos de E, diverge cuando $E \to -E_L$. Discuta el resultado.

3. La función de onda de un sistema está dada por

$$\psi(x) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{-\alpha x^2}{2}\right).$$

   a) Calcule el valor de expectación de la posición en este estado. ¿Qué significa el resultado que se obtiene?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar a la partícula en un intervalo simétrico en torno al origen? ¿Qué pasa con esta probabilidad a medida que el intervalo crece? Interprete su resultado.