Mecánica Estadística

Corrección Tarea 1

Universidad del Chile, Facultad de Ciencias,
Departamento de Física, Santiago, Chile

Ayudante: Felipe González
Profesor: David Gottlieb

26 de septiembre de 2010

Problema 1

Sabemos que la distribución de probabilidad de este sistema es

$$P_{n_1} = \frac{N!}{n_1! n_2!} p^{n_1} q^{n_2}$$

donde $p = v/V$ es la probabilidad de encontrar n_1 partículas en un volumen v y el resto (n_2) fuera de él, $q = 1-p$. Se tiene $N = n_1 + n_2$. Para esta distribución, sabemos que se cumple

$$< n >= \sum_{n=0}^{N} n W(n) = Np = N\frac{v}{V}.$$

Con esto, podemos escribir la probabilidad como

$$P_n = \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{< n >}{N} \right)^n \left(1 - \frac{< n >}{N} \right)^{N-n}.$$

Por otro lado,

$$\frac{N!}{(N-n)!} = N(N-1)\cdots(N-(n-1)) = N^n \left(1 - \frac{1}{N} \right) \cdots \left(1 - \frac{(n-1)}{N} \right) \approx N^n,$$

luego

$$P_n = \frac{N^n}{n!} \left(\frac{< n >}{N} \right)^n \left(1 - \frac{< n >}{N} \right)^{N-n} = \frac{< n >^n}{n!} \left(1 - \frac{< n >}{N} \right)^{N-n}.$$

Para $N \gg n$ se tiene $(N-n) \approx N$ y

$$\left(1 - \frac{< n >}{N} \right)^N \approx e^{-< n >}.$$

Por lo tanto

$$P_n = \frac{< n >^n}{n!} e^{-< n >}.$$

Problema 2

a) La probabilidad de dar n_1 saltos a la derecha en un total de N es

$$W(n_1) = \frac{N!}{n_1! n_2!} p^{n_1} q^{n_2}$$

con $n_2 = N - n_1$ la cantidad de pasos a la izquierda. Sabemos que para esta distribución, $< n_1 >= Np$ y $< n_2 >= Nq$, luego, como la distancia avanzada está dada por

$$x = n_1 a - n_2 a,$$

es decir, la distancia total que avanzó hacia la derecha menos la distancia que avanzó hacia la izquierda, tenemos que la posición promedio es

$$< x >=< n_1 > a- < n_2 > a = Na(p - q).$$

Esto es coherente, ya que si la probabilidad de avanzar es la misma que la probabilidad de retroceder ($p = q$), entonces la partícula en promedio, no avanza.

b) La distancia que se desvía de la posición promedio es

$$\Delta x = \sqrt{< x^2 > - < x >^2}$$

donde

$$< x^2 >= \sum_{n_1=0}^{N} x^2 W(n_1) = \sum_{n_1=0}^{N} (2n_1 - N)^2 a^2 W(n_1) = 4a^2 < n_1^2 > -4Na^2 < n_1 > N^2 a^2,$$

en donde hemos usado que $x^2 = a^2(n_1 - n_2) = a^2(n_1 - (N - n_1))^2 = a^2(2n_1 - N)^2$. Como también sabemos que $< n^2 >= Npq$, obtenemos finalmente

$$\Delta x = \sqrt{4a^2 pq}.$$

Problema 3

Si hay $n_\uparrow$ partículas con spin +1/2 y $n_\downarrow$ con sn -1/2, el spin total es

$$m = m_\uparrow \left(\frac{1}{2}\right) + n_\downarrow \left(-\frac{1}{2}\right)$$

Como claramente $n_\uparrow + n_\downarrow = N$, podemos despejar

$$n_\uparrow = \frac{N}{2} + m \qquad n_\downarrow = \frac{N}{2} - m.$$

Con esto, la cantidad de micro estados accesibles queda

$$\Omega = \frac{N!}{n_\uparrow ! n_\downarrow} = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2} + m\right)! \left(\frac{N}{2} - m\right)!}$$

Maximizar el logaritmo de esta función es más fácil que maximizar la función misma y resultado es el mismo, luego, al derivar $\ln \Omega$ se obtiene

$$\frac{\partial(\ln \Omega)}{\partial n_\uparrow} = -\ln n_\uparrow + \ln(N - n_\uparrow) = 0$$

de donde se obtiene $n_\uparrow = N/2$, es decir, cuando la cantidad de estados es máxima, $m = 0$.