UNIVERSIDAD DE CHILE
Departamento de Física
Física Contemporánea 2010

Solución tarea 3

Profesor: Mario Molina **Ayudante**: Felipe González

1. Experimento Original

Consideremos primero la solución al experimento de Michelson-Morley original:

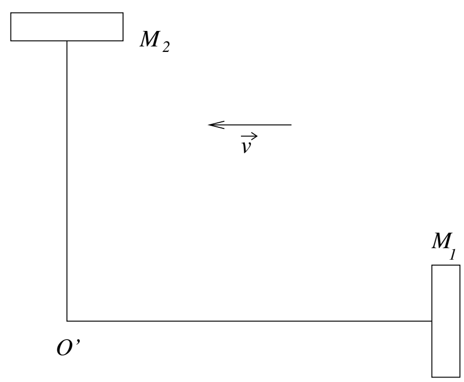


Figura 1: Interferómetro de Michelson-Morley

En el sistema O' (el interferómetro), un haz de luz viaja en $\hat{\mathbf{y}}$ hacia el espejo M_2 y otro hacia M_1, como se muestra en la figura 1, mientras el éter viaja con velocidad $\mathbf{v} = v(-\hat{\mathbf{x}})$. Analicemos cada una de las trayectorias:

$\boxed{M_2 \uparrow}$ En el viaje del haz de luz desde O' a M_2, vista por O', la velocidad vertical de éste es igual a la suma de la velocidad $\mathbf{v_O}$ vista desde el sistema O (el laboratorio) y la del éter ($\mathbf{v}$), de modo tal que esta suma cancela la componente $\hat{\mathbf{x}}$. Luego

$$\mathbf{v_{O'}} = v_{O'}\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{v_O} + \mathbf{v} = \mathbf{v_O} - v\hat{\mathbf{x}} = (v_{O_x} - v)\hat{\mathbf{x}} + (v_{O_y})\hat{\mathbf{y}}$$

por lo tanto

$$\left.\begin{array}{rcl} v_{O_y} & = & v_{O'} \\ v_{O_x} - v & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v_{O_y}^2 + v_{O_x}^2 = v_O^2 \equiv c^2 = v_{O'}^2 + v^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{O'} = \sqrt{c^2 - v^2}} \tag{1}$$

Descartamos la solución $v_{O'} = -\sqrt{c^2 - v^2}$ ya que, por construcción, v'_O es positivo.

$\boxed{M_2 \downarrow}$ En el viaje del haz de luz desde M_2 a O', vista por O', la velocidad vertical de éste es igual a la suma de la velocidad $\mathbf{v_O}$ vista desde el sistema O (el laboratorio) y la del éter ($\mathbf{v}$), de modo tal que esta suma cancela la componente $\hat{\mathbf{x}}$. Luego

$$\mathbf{v_{O'}} = -v_{O'}\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{v_O} + \mathbf{v} = \mathbf{v_O} - v\hat{\mathbf{x}} = (v_{O_x} - v)\hat{\mathbf{x}} + (v_{O_y})\hat{\mathbf{y}}$$

por lo tanto

$$\left.\begin{array}{rcl} v_{O_y} & = & -v_{O'} \\ v_{O_x} - v & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v_{O_y}^2 + v_{O_x}^2 = v_O^2 \equiv c^2 = v_{O'}^2 + v^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{O'} = \sqrt{c^2 - v^2}} \tag{2}$$

Descartamos la solución $v_{O'} = -\sqrt{c^2 - v^2}$ ya que, por construcción, v_O' es positivo.

$\boxed{M_1 \rightarrow}$ En el viaje del haz de luz desde O' a M_1, vista por O', la velocidad horizontal de éste es igual a la suma de la velocidad $\mathbf{v_O}$ vista desde el sistema O (el laboratorio) y la del éter ($\mathbf{v}$), de modo tal que esta suma cancela la componente $\hat{\mathbf{y}}$. Luego

$$\mathbf{v_{O'}} = v_{O'}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{v_O} + \mathbf{v} = \mathbf{v_O} - v\hat{\mathbf{x}} = (v_{O_x} - v)\hat{\mathbf{x}} + (v_{O_y})\hat{\mathbf{y}}$$

por lo tanto

$$\left.\begin{array}{rcl} v_{O_y} & = & 0 \\ v_{O_x} - v & = & v_{O'} \end{array}\right\} \Rightarrow v_{O_y}^2 + v_{O_x}^2 = v_O^2 \equiv c^2 = (v_{O'} + v)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{O'} = c - v} \tag{3}$$

Descartamos la solución $c = -(v_{O'} + v)$ ya que, por construcción, c es positivo.

$\boxed{M_1 \leftarrow}$ En el viaje del haz de luz desde M_1 a O', vista por O', la velocidad horizontal de éste es igual a la suma de la velocidad $\mathbf{v_O}$ vista desde el sistema O (el laboratorio) y la del éter ($\mathbf{v}$), de modo tal que esta suma cancela la componente $\hat{\mathbf{y}}$. Luego

$$\mathbf{v_{O'}} = -v_{O'}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{v_O} + \mathbf{v} = \mathbf{v_O} - v\hat{\mathbf{x}} = (v_{O_x} - v)\hat{\mathbf{x}} + (v_{O_y})\hat{\mathbf{y}}$$

por lo tanto

$$\left.\begin{array}{rcl} v_{O_y} & = & 0 \\ v_{O_x} - v & = & -v_{O'} \end{array}\right\} \Rightarrow v_{O_y}^2 + v_{O_x}^2 = v_O^2 \equiv c^2 = (v - v_{O'})^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{O'} = c + v} \tag{4}$$

Descartamos la solución $c = (v - v_{O'})$ ya que eso significaría que $v_{O'} = v - c$, lo cual no tiene sentido ya que, como $v_{O'} > 0$, se tendría $v > c$.

Ahora sabemos con qué velocidad viajan los haces en cada tramo. El tiempo en ir a M_1 y volver será

$$t_1 = \frac{\ell}{c - v} + \frac{\ell}{c + v} = \frac{(2\ell/c)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{2\ell}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).$$

El tiempo en ir a M_2 y volver será

$$t_2 = \frac{\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{(2\ell/c)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{2\ell}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right).$$

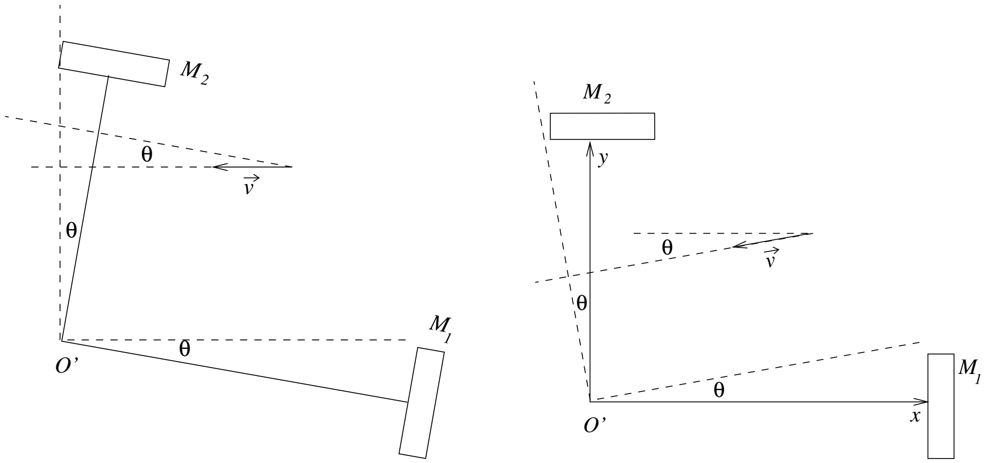
Por lo tanto

$$\boxed{\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2\ell}{c}\left(\frac{v^2}{2c^2}\right) = \frac{\ell v^2}{c^2}.}$$

2. Interferómetro Rotado

Antes de comenzar este análisis es importante que hemos realizado un **análisis sistemático** de los casos, es decir, tenemos un método que se ve casi idéntico en todos los casos y sólo hay que reemplazar lo que corresponda. Esperamos que con una velocidad con dos componentes la situación no sea tan diferente. En cualquier caso, al evaluar estos nuevos resultados en $\theta = 0$, **debemos necesariamente los resultados antes obtenidos**, es decir, debemos ser consistentes.

Al rotar el interferómetro de Michelson-Morley, obtenemos la situación mostrada en la figura 2.



(a) Interferómetro con velocidad hacia la derecha

(b) Situación de la derecha, rotada

Figura 2: Interferómetro de Michel-Morley rotado en un ángulo θ.

El dibujo a la derecha es idéntico al de la izquierda, en donde hemos puesto los ejes de coordenadas de modo que coincidan con la trayectoria de los haces de luz de forma horizontal. En el sistema O' (el interferómetro), un haz de luz viaja en $\hat{\mathbf{y}}$ hacia el espejo M_2 y otro hacia M_1, como se muestra en la figura 2(b), mientras el éter viaja con velocidad $\mathbf{v} = v\cos\theta(-\hat{\mathbf{x}}) + v\sin\theta(-\hat{\mathbf{y}})$. Analicemos cada una de las trayectorias:

$\boxed{M_2 \uparrow}$ En el viaje del haz de luz desde O' a M_2, vista por O', la velocidad vertical de éste es igual a la suma de la velocidad $\mathbf{v_O}$ vista desde el sistema O (el laboratorio) y la del éter ($\mathbf{v}$), de modo tal que esta suma cancela la componente $\hat{\mathbf{x}}$. Luego

$$\mathbf{v_{O'}} = v_{O'}\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{v_O} + \mathbf{v} = (v_{O_x} - v\cos\theta)\hat{\mathbf{x}} + (v_{O_y} - v\sin\theta)\hat{\mathbf{y}}$$

por lo tanto

$$\left.\begin{array}{rcl} v_{O_y} - v\sin\theta & = & v_{O'} \\ v_{O_x} - v\cos\theta & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v_{O_y}^2 + v_{O_x}^2 = v_O^2 \equiv c^2 = (v_{O'} + v\sin\theta)^2 + (v\cos\theta)^2,$$

por lo tanto

$$\boxed{v_{O'} = \sqrt{c^2 - v^2\cos^2\theta} - v\sin\theta} \tag{5}$$

Descartamos la solución $v_{O'} + v\sin\theta = -\sqrt{c^2 - v^2\cos^2\theta}$ ya que, por construcción, v_O' es positivo.

$\boxed{M_2 \downarrow}$ En el viaje del haz de luz desde M_2 a O', vista por O', la velocidad vertical de éste es igual a la suma de la velocidad $\mathbf{v_O}$ vista desde el sistema O (el laboratorio) y la del éter ($\mathbf{v}$), de modo tal que esta suma cancela la componente $\hat{\mathbf{x}}$. Luego

$$\mathbf{v_{O'}} = -v_{O'}\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{v_O} + \mathbf{v} = (v_{O_x} - v\cos\theta)\hat{\mathbf{x}} + (v_{O_y} - v\sin\theta)\hat{\mathbf{y}}$$

por lo tanto

$$\left.\begin{array}{rcl} v_{O_y} - v\sin\theta & = & -v_{O'} \\ v_{O_x} - v\cos\theta & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v_{O_y}^2 + v_{O_x}^2 = v_O^2 \equiv c^2 = (v\sin\theta - v_{O'})^2 + (v\cos\theta)^2,$$

por lo tanto

$$\boxed{v_{O'} = \sqrt{c^2 - v^2\cos^2\theta} + v\sin\theta} \tag{6}$$

Descartamos la solución $(v \sin\theta - v_{O'}) = \sqrt{c^2 - v^2 \cos^2\theta}$, quedándonos con la raiz negativa, por lo siguiente: aceptar esto como solución, considerando que $v_{O'} > 0$, significaría que, $v \sin\theta > \sqrt{c^2 - v^2 \cos^2\theta}$, entonces tendríamos $v^2 \sin^2\theta > c^2 - v^2 \cos^2\theta$, que es equivalente a $v > c$, lo cual es claramente una contradicción. Debemos elegir, entonces, la raiz negativa.

$\boxed{M_1 \rightarrow}$ En el viaje del haz de luz desde O' a M_1, vista por O', la velocidad horizontal de éste es igual a la suma de la velocidad $\mathbf{v_O}$ vista desde el sistema O (el laboratorio) y la del éter ($\mathbf{v}$), de modo tal que esta suma cancela la componente $\hat{\mathbf{y}}$. Luego

$$\mathbf{v_{O'}} = v_{O'}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{v_O} + \mathbf{v} = (v_{O_x} - v\cos\theta)\hat{\mathbf{x}} + (v_{O_y} - v\sin\theta)\hat{\mathbf{y}}$$

por lo tanto

$$\left.\begin{array}{rcl} v_{O_y} - v\sin\theta & = & 0 \\ v_{O_x} - v\cos\theta & = & v_{O'} \end{array}\right\} \Rightarrow v_{O_y}^2 + v_{O_x}^2 = v_O^2 \equiv c^2 = (v\sin\theta)^2 + (v_{O'} + v\cos\theta)^2,$$

por lo tanto

$$\boxed{v_{O'} = \sqrt{c^2 - v^2\sin^2\theta} - v\cos\theta} \tag{7}$$

Descartamos la solución $(v_{O'} + v\cos\theta) = -\sqrt{c^2 - v^2\sin^2\theta}$, ya que $v_{O'} > 0$.

$\boxed{M_1 \leftarrow}$ En el viaje del haz de luz desde M_1 a O', vista por O', la velocidad horizontal de éste es igual a la suma de la velocidad $\mathbf{v_O}$ vista desde el sistema O (el laboratorio) y la del éter ($\mathbf{v}$), de modo tal que esta suma cancela la componente $\hat{\mathbf{y}}$. Luego

$$\mathbf{v_{O'}} = -v_{O'}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{v_O} + \mathbf{v} = (v_{O_x} - v\cos\theta)\hat{\mathbf{x}} + (v_{O_y} - v\sin\theta)\hat{\mathbf{y}}$$

por lo tanto

$$\left.\begin{array}{rcl} v_{O_y} - v\sin\theta & = & 0 \\ v_{O_x} - v\cos\theta & = & -v_{O'} \end{array}\right\} \Rightarrow v_{O_y}^2 + v_{O_x}^2 = v_O^2 \equiv c^2 = (v\sin\theta)^2 + (v\cos\theta - v_{O'})^2,$$

por lo tanto

$$\boxed{v_{O'} = \sqrt{c^2 - v^2\sin^2\theta} + v\cos\theta} \tag{8}$$

Descartamos la solución $(v\cos\theta - v_{O'}) = \sqrt{c^2 - v^2\sin^2\theta}$, ya que, como antes, esto implicaría que $v > c$.

Ahora sabemos con qué velocidad viajan los haces en cada tramo. NOTEN, que **todos y cada uno de los resultados recupera el caso anterior al tomar $\boldsymbol{\theta = 0}$**. El tiempo en ir a M_1 y volver será

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{\ell}{\sqrt{c^2 - v^2\sin^2\theta} - v\cos\theta} + \frac{\ell}{\sqrt{c^2 - v^2\sin^2\theta} + v\cos\theta} \\ &= \frac{(2\ell/c)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta} \\ &\approx \frac{2\ell}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right). \\ &\approx \frac{2\ell}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta + \frac{v^2}{c^2}\right). \end{aligned}$$

El tiempo en ir a M_2 y volver será

$$
\begin{aligned}
t_2 &= \frac{\ell}{\sqrt{c^2 - v^2\cos^2\theta} - v\sin\theta} + \frac{\ell}{\sqrt{c^2 - v^2\cos^2\theta} + v\sin\theta} \\
&= \frac{(2\ell/c)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta} \\
&\approx \frac{2\ell}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta\right). \\
&\approx \frac{2\ell}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta + \frac{v^2}{c^2}\right).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\boxed{\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\ell}{c}\left(\frac{v^2}{2c^2}[\cos^2\theta - \sin^2\theta]\right) = \frac{\ell v^2}{c^2}\cos(2\theta).}
$$