

Solución Tarea 2

1. Tenemos el conjunto de operadores

$$\check{\mathbf{A}}_\theta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -i \sin \theta \\ i \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix},$$

uno por cada valor de θ .

- a) Cada uno de estos operadores puede venir de un observable físico, ya que todo observable físico tiene asociado un operador autohermítico, y estos lo son.
- b) Para $\pi \neq \theta \neq 0$, los autovectores normalizados son

$$|\tfrac{1}{2}; \theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \theta)}} \begin{pmatrix} i \sin \theta \\ \cos \theta - 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |-\tfrac{1}{2}; \theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \theta)}} \begin{pmatrix} i \sin \theta \\ \cos \theta + 1 \end{pmatrix},$$

en donde $|\pm \tfrac{1}{2}; \theta\rangle$ es el autovector que entrega el autovalor $\pm \tfrac{1}{2}$ frente a $\check{\mathbf{A}}_\theta$. Esto quiere decir que independiente del valor de θ , el operador entregará $\tfrac{1}{2}$ o $-\tfrac{1}{2}$. Ahora, para comprobar la completitud de la base, sumamos sus proyectores para comprobar que esta suma sea el operador identidad:

$$\begin{aligned} |\tfrac{1}{2}; \theta\rangle \langle \tfrac{1}{2}; \theta| + |-\tfrac{1}{2}; \theta\rangle \langle -\tfrac{1}{2}; \theta| &= \frac{1}{2(1 - \cos \theta)} \begin{pmatrix} i \sin \theta \\ \cos \theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \sin \theta & \cos \theta - 1 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2(1 + \cos \theta)} \begin{pmatrix} i \sin \theta \\ \cos \theta + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \sin \theta & \cos \theta + 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(1 - \cos \theta)} \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & i \sin \theta \cos \theta - i \sin \theta \\ -i \sin \theta \cos \theta + i \sin \theta & (\cos \theta - 1)^2 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2(1 + \cos \theta)} \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & i \sin \theta \cos \theta + i \sin \theta \\ -i \sin \theta \cos \theta - i \sin \theta & (\cos \theta + 1)^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sumando ambas matrices, obtenemos la matriz

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \left(\frac{2}{1 - \cos^2 \theta} \right) & i \sin \theta \cos \theta \left(\frac{2}{1 - \cos^2 \theta} \right) - i \sin \theta \left(\frac{2 \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} \right) \\ -i \sin \theta \cos \theta \left(\frac{2}{1 - \cos^2 \theta} \right) + i \sin \theta \left(\frac{2 \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} \right) & 2 \end{pmatrix},$$

la cual es igual a

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \check{\mathbf{I}} = |\tfrac{1}{2}; \theta\rangle \langle \tfrac{1}{2}; \theta| + |-\tfrac{1}{2}; \theta\rangle \langle -\tfrac{1}{2}; \theta|,$$

lo que demuestra la completitud de la base.

La forma de escribir estos autovectores, presenta problemas de indeterminación cuando $\theta = 0$ y cuando $\theta = \pi$. En estos casos se tiene

$$\check{\mathbf{A}}_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \check{\mathbf{A}}_\pi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Cuyos autovectores son claramente

$$|\frac{1}{2}; 0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\frac{1}{2}; 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-\frac{1}{2}; \pi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\frac{1}{2}; \pi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

en cuyos casos la completitud es obvia.

- c) Como ya mencionamos, en una medición de $\check{\mathbf{A}}_\theta$ sólo se puede obtener $\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$.
- d) Si se mide $\check{\mathbf{A}}_z$ ($\theta = 0$) y se obtiene el mayor de los autovalores posibles, significa que el resultado de la medición fué $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, luego de la medición, el sistema queda en el estado $|\frac{1}{2}; 0\rangle$. Si ahora volvemos a medir $\check{\mathbf{A}}_z$, la probabilidad de obtener el otro resultado posible de una medición ($-\frac{1}{2}$) es

$$\Pr(-\frac{1}{2}) = |\langle -\frac{1}{2}; 0 | \frac{1}{2}; 0 \rangle|^2 = 0,$$

ya que los estados de $\check{\mathbf{A}}_z$ son ortonormales. Esto quiere decir que es imposible obtener el autovalor $-\frac{1}{2}$ después de haber obtenido $\frac{1}{2}$ en una medición de $\check{\mathbf{A}}_z$ y, por lo tanto, en esta segunda medición de $\check{\mathbf{A}}_z$, se obtendrá nuevamente $\frac{1}{2}$ con un 100 % de certeza.

- e) Si se mide $\check{\mathbf{A}}_z$ ($\theta = 0$) y se obtiene el mayor de los autovalores posibles, significa que el resultado de la medición fué $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, luego de la medición, el sistema queda en el estado $|\frac{1}{2}; 0\rangle$. Supongamos que ahora se mide $\check{\mathbf{A}}_\theta$, con θ arbitrario. Como los únicos resultados posibles de una medición de $\check{\mathbf{A}}_\theta$ son los autovalores del operador, ahora podemos obtener tanto $\frac{1}{2}$ como $-\frac{1}{2}$. La probabilidad de obtener $-\frac{1}{2}$ será

$$\Pr(-\frac{1}{2}) = |\langle -\frac{1}{2}; \theta | \frac{1}{2}; 0 \rangle|^2,$$

ya que el sistema se encuentra en el estado $|\frac{1}{2}; 0\rangle$. Evaluando el producto interno, se obtiene

$$\Pr(-\frac{1}{2}) = \left| \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos\theta)}} \begin{pmatrix} -i\sin\theta & \cos\theta + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{\sin^2\theta}{2(1+\cos\theta)},$$

mientras que la probabilidad de obtener ($\frac{1}{2}$) será

$$\Pr(\frac{1}{2}) = 1 - \Pr(-\frac{1}{2}).$$

Esto nos dice que la probabilidad de obtener cada uno de los autovalores va a depender del ángulo θ . En particular, reobtenemos el resultado anterior: si $\theta = 0$, la probabilidad de medir $-\frac{1}{2}$ será 0 %; pero existe un valor de θ para el cual es posible obtener $-\frac{1}{2}$ con un 100 % de certeza. Esto se da cuando

$$\Pr(-\frac{1}{2}) = \frac{\sin^2\theta}{2(1+\cos\theta)} = 1,$$

lo que implica que θ debe cumplir la ecuación

$$\sin^2\theta = 2 + 2\cos\theta.$$

Escribiendo $\sin^2\theta$ como $1 - \cos^2\theta$, obtenemos la ecuación cuadrática

$$\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0 = (\cos\theta + 1)^2,$$

cuya solución es $\cos \theta = -1$, es decir, cuando $\theta = \pi$.

El sentido físico de esto es que si yo mido en un ángulo $\theta = 0$ y colapso la función de onda a $|\frac{1}{2}; 0\rangle$, que podemos ejemplificar como el estado “spin up”, voy a volver a obtener este estado cada vez que vuelva a medir el spin. Pero si yo me pongo “de cabeza” ($\theta = \pi$), ahora veo que lo que antes era arriba, ahora es abajo, y viceversa. Por lo tanto, ahora veo el antiguo estado “spin up” como “spin down”. Es por esto que puedo obtener el otro autovalor con certeza absoluta.

f) Si se mide $\check{\mathbf{A}}_z$ y se obtiene $-\frac{1}{2}$, el sistema queda en el estado $|\frac{1}{2}; 0\rangle$. Si luego se mide $\check{\mathbf{A}}_{\frac{\pi}{2}}$ y se obtiene $\frac{1}{2}$, el sistema queda en $|\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$. La probabilidad de obtener $-\frac{1}{2}$ al medir $\check{\mathbf{A}}_z$ es

$$\Pr\left(-\frac{1}{2}\right) = \left| \left\langle -\frac{1}{2}; 0 \left| \frac{1}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle \right|^2 = \frac{(\cos \frac{\pi}{2} - 1)^2}{2(1 - \cos \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{2},$$

por lo tanto, hay igual posibilidad de obtener $-\frac{1}{2}$ como $\frac{1}{2}$ al realizar esta última medición luego de realizar la anterior.

2. Consideremos primero los conmutadores del momento angular con los operadores de posición y momentum:

$$\begin{aligned} [\check{\mathbf{L}}_i, \check{\mathbf{r}}_j] &= [\varepsilon_{ilm} \check{\mathbf{r}}_\ell \check{\mathbf{p}}_m, \check{\mathbf{r}}_j] \\ &= \varepsilon_{ilm} (\check{\mathbf{r}}_\ell [\check{\mathbf{p}}_m, \check{\mathbf{r}}_j] + [\check{\mathbf{r}}_\ell, \check{\mathbf{r}}_j] \check{\mathbf{p}}_m) \\ &= \varepsilon_{ilm} \check{\mathbf{r}}_\ell (-i\hbar \delta_{mj} \check{\mathbf{I}}) \\ &= i\hbar \varepsilon_{ijl} \check{\mathbf{r}}_\ell \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} [\check{\mathbf{L}}_i, \check{\mathbf{p}}_j] &= [\varepsilon_{ilm} \check{\mathbf{r}}_\ell \check{\mathbf{p}}_m, \check{\mathbf{p}}_j] \\ &= \varepsilon_{ilm} (\check{\mathbf{r}}_\ell [\check{\mathbf{p}}_m, \check{\mathbf{p}}_j] + [\check{\mathbf{r}}_\ell, \check{\mathbf{p}}_j] \check{\mathbf{p}}_m) \\ &= \varepsilon_{ilm} (i\hbar \delta_{lj} \check{\mathbf{I}}) \check{\mathbf{p}}_m \\ &= i\hbar \varepsilon_{ijm} \check{\mathbf{p}}_m. \end{aligned}$$

Con esto,

$$\begin{aligned} [\check{\mathbf{L}}_i, \check{\mathbf{L}}_j] &= [\check{\mathbf{L}}_i, \varepsilon_{jkl} \check{\mathbf{r}}_k \check{\mathbf{p}}_\ell] \\ &= \varepsilon_{jkl} (\check{\mathbf{r}}_k [\check{\mathbf{L}}_i, \check{\mathbf{p}}_\ell] + [\check{\mathbf{L}}_i, \check{\mathbf{r}}_k] \check{\mathbf{p}}_\ell) \\ &= \varepsilon_{jkl} (\check{\mathbf{r}}_k \varepsilon_{ilm} (i\hbar \check{\mathbf{p}}_m) + \varepsilon_{ikm} (i\hbar \check{\mathbf{r}}_m) \check{\mathbf{p}}_\ell) \\ &= i\hbar (\varepsilon_{jkl} \varepsilon_{ilm} \check{\mathbf{r}}_k \check{\mathbf{p}}_m + \varepsilon_{jkl} \varepsilon_{ikm} \check{\mathbf{r}}_m \check{\mathbf{p}}_\ell) \\ &= i\hbar ((-\delta_{ji} \delta_{km} + \delta_{ki} \delta_{jm}) \check{\mathbf{r}}_k \check{\mathbf{p}}_m + (\delta_{ji} \delta_{lm} - \delta_{li} \delta_{jm}) \check{\mathbf{r}}_m \check{\mathbf{p}}_\ell) \\ &= i\hbar (-\delta_{ji} \check{\mathbf{r}}_k \check{\mathbf{p}}_k + \check{\mathbf{r}}_i \check{\mathbf{p}}_j + \delta_{ji} \check{\mathbf{r}}_\ell \check{\mathbf{p}}_\ell - \check{\mathbf{r}}_j \check{\mathbf{p}}_i) \\ &= i\hbar (-\delta_{ji} \check{\mathbf{r}} \cdot \check{\mathbf{p}} + \check{\mathbf{r}}_i \check{\mathbf{p}}_j + \delta_{ji} \check{\mathbf{r}} \cdot \check{\mathbf{p}} - \check{\mathbf{r}}_j \check{\mathbf{p}}_i) \\ &= i\hbar (\check{\mathbf{r}}_i \check{\mathbf{p}}_j - \check{\mathbf{r}}_j \check{\mathbf{p}}_i) \\ &= i\hbar (\check{\mathbf{r}} \times \check{\mathbf{p}})_k \\ &= i\hbar \check{\mathbf{L}}_k. \end{aligned}$$