Mecánica Estadística

Corrección Tarea 2

Universidad del Chile, Facultad de Ciencias,
Departamento de Física, Santiago, Chile

Ayudante: Felipe González
Profesor: David Gottlieb

26 de septiembre de 2010

Problema 1

Cada partícula tiene niveles de energía $\varepsilon = nh\nu$, con n entero, por lo que la energía del sistema es $E = Mh\nu$, con M algun entero. La cantidad de maneras en que las N partículas se pueden distribuir de modo que den la misma energía E (partícula 1 con energía $n_1 h\nu$, partícula 2 con energía $n_2 h\nu$, etc...) es

$$\Omega = \frac{(M + (N-1))!}{(N-1)!M!}$$

La entropía es

$$S = k\ln\Omega = k\left[\left(\frac{E}{h\nu} + N - 1\right)\ln\left(\frac{E}{h\nu} + N - 1\right) - \frac{E}{h\nu}\ln\left(\frac{E}{h\nu}\right) - (N-1)\ln(N-1)\right],$$

de donde obtenemos

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = k\left[\frac{1}{h\nu}\ln\left(1 + \frac{(N-1)}{e/h\nu}\right)\right] \approx k\left[\frac{1}{h\nu}\ln\left(1 + \frac{N}{e/h\nu}\right)\right].$$

Despejando E se obtiene

$$E = \frac{Nh\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Si $kT \gg h\nu$, $e^{h\nu/kT} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}$ y

$$E = NkT.$$

El calor específico en este límite es

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{V,N} = kN$$

.

Problema 2

La función de onda para el pozo satisface la ecuación de Schrödinger, cuya solución en este caso es

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ A\sin(k_1 x) & 0 \leqslant x \leqslant a \\ Ce^{-k2x} & a \leqslant x \end{cases}$$

en donde hemos impuesto la continuidad de ψ en $x = 0$. De la continuidad de ψ y ψ' en $x = a$ surgen las ecuaciones

$$A\sin(k_1 a) = Ce^{-k_2 a}$$

$$Ak_1\cos(k_1 a) = -Ck_2 e^{-k_2 a}$$

que dan origen a

$$(k_1 a)\cot(k_1 a) = -(k_2 a).$$

Notamos tambien que, de la definición de k_1 y k_2, se cumple

$$(k_1 a)^2 + (k_2 a)^2 = 2mV_0 \frac{a^2}{\hbar^2} \equiv R.$$

Estas dos ecuaciones se deben satisfacer simultáneamente, es decir, las curvas que dibujan ambas funciones se deben intersectar, como vemos en el gráfico.

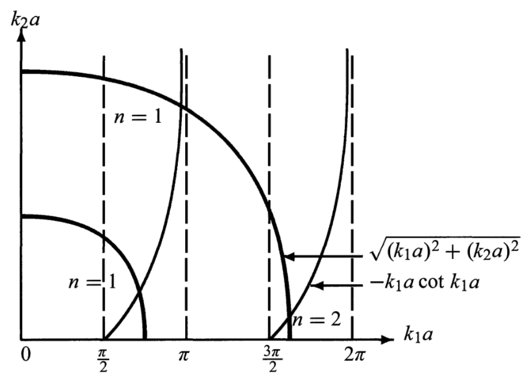

Figura 1: Intersección de curvas que dan los valores de k_1 y k_2.

La condición sobre V_0 dada en el enunciado se traduce en

$$\frac{5\pi}{2} < R < \frac{7\pi}{2}.$$

Cuando R está en ese rango, genera 3 intersecciones, es decir, las partículas sólo tienen 3 niveles de energía permitidos: $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Cuando tenemos N partículas en este potencial, con acceso a solo 3 energías posibles, hay una cantidad de microestados posibles igual a

$$\Omega = \frac{N!}{n_1! n_2! n_3!}.$$

donde n_i es la cantidad de partículas en el nivel ε_i, por lo tanto se cumple

$$n_1 + n_2 + n_3 = N$$

y

$$n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + n_3 \varepsilon_3 = E.$$

Nos falta solo una ecuación para poder encontrar todos los n_i, y viene dada por la información dada en el enunciado, la cual se traduce en

$$\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} = \frac{n_0}{n_2}.$$

Tenemos con esto un sistema de ecuaciones lineales de 3x3 para los n_i, con las cuales encontramos

$$n_0 = \frac{\varepsilon_0 (E - \varepsilon_1 N)}{\varepsilon_0^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2^2}, \qquad n_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} n_0, \qquad n_1 = N - n_2 - n_0.$$

Considerando que los n_i ya son conocidos (en función de E y las energías ε_i), podemos expresar la entropía:

$$S = k \ln \Omega = N \ln N - n_1 \ln n_1 - n_2 \ln n_2 - n_3 \ln n_3,$$

con la cual obtenemos

$$\frac{1}{kT} = \frac{1}{k}\frac{\partial S}{\partial E} = -\frac{\varepsilon_0}{r^2} \ln \left(\frac{\varepsilon_0 (E - N\varepsilon_1)}{r^2} \right) + \frac{(\varepsilon_0 + \varepsilon_2)}{r^2} \ln \left(\frac{(\varepsilon_0^2 - \varepsilon_2^2)N - (\varepsilon_0 + \varepsilon_2)E}{r^2} \right) - \frac{\varepsilon_2}{r^2} \ln \left(\frac{\varepsilon_2 (E - N\varepsilon_1)}{r^2} \right),$$

con $r^2 = \varepsilon_0^2 - \varepsilon_0\varepsilon_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2$.