UNIVERSIDAD DE CHILE
Departamento de Física
Física Contemporánea 2010

Solución tarea 3

Profesor: Mario Molina **Ayudante**: Felipe González

Problema 1

Tenemos un evento $p_1 = (ct_1, x_1) = (x_0, x_0)$ y un evento $p_2 = (ct_2, x_2) = (x_0/2, 2x_0)$. Usando las ecuaciones de Lorentz

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right) \\ x' &= \gamma(x - vt) \end{aligned} \tag{1}$$

podemos deducir que, para que los eventos sean simultáneos en O', debemos tener

$$c\Delta t' = 0 = \gamma\left(c\Delta t - \frac{v}{c}\Delta x\right) = \gamma\left[(ct_2 - ct_1) - \frac{v}{c}(x_2 - x_1)\right] = \gamma\left(-\frac{x_0}{2} - \frac{v}{c}x_0\right).$$

Como $0 = \gamma x_0(-1/2 - v/c)$, se tiene que $v = -c/2$.

El tiempo en el que los dos eventos ocurren en este sistema de referencia está dado por

$$t' = t_2' = t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c}x_1\right) = \frac{(3/2)c}{\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2}} = \sqrt{3}\,\frac{x_0}{2}.$$

Problema 2

Tenemos una fuerza $\mathbf{F} = -F\hat{\mathbf{y}}$ actuando sobre una partícula de masa m con velocidad inicial $\mathbf{v}(t=0) = v_0\hat{\mathbf{x}}$. La segunda ley de Newton nos dice que

$$\mathbf{F} = -F\hat{\mathbf{y}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}(\gamma m v_x\hat{\mathbf{x}} + \gamma m v_y\hat{\mathbf{y}}),$$

lo que nos permite concluír que

$$\frac{d}{dt}(\gamma m v_x) = 0 \qquad \text{y} \qquad -F = \frac{d}{dt}(\gamma m v_y),$$

es decir,

$$\gamma(t) m v_x(t) = a \qquad \text{y} \qquad -Ft + b = \gamma(t) m v_y(t) \tag{2}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes dadas por las condiciones iniciales. Dado que $v_x(0) = v_0$ y $v_y(0) = 0$, tenemos

$$a = \gamma(0) m v_x(0) = \frac{m v_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \equiv \gamma_0 m v_0 \qquad \text{y} \qquad b = \gamma(0) m v_y(0) = 0.$$

Considerando el valor obtenido para estas constantes, al dividir ambas ecuaciones en (2) se obtiene

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{b - Ft}{a} = -\frac{Ft}{\gamma_0 m v_0}. \tag{3}$$

Elevando a al cuadrado, obtenemos

$$a^2 = \gamma^2 m^2 v_x^2 = \frac{m^2 v_x^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad \Rightarrow \qquad m^2 v_x^2 = a^2 \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2} - \frac{v_y^2}{c^2} \right).$$

ya que $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. Reemplazando v_y de (3) y despejando v_x se obtiene

$$v_x(t) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \frac{1}{c^2} + \frac{(b-Ft)}{a^2c^2}}}.$$

Reemplazando la ecuación anterior en (3), obtenemos

$$v_y(t) = \frac{(b-Ft)}{a} v_x(t).$$

Reemplazando los valores a y b ya despejados, obtenemos

$$\boxed{v_x(t) = \left[\frac{1}{v_0^2} + \frac{F^2}{\gamma_0^2 m_0^2 v_0^2 c^2} \right]^{-\frac{1}{2}}}. \tag{4}$$

$$\boxed{v(y) = -\frac{Ft}{\gamma_0 m_0 v_0} v_x(t)}. \tag{5}$$

Notemos que la solución clásica es $v_x(t) = v_0$ y $v_y(t) = -Ft$.
Por otro lado, como toda velocidad es menor que la velocidad de la luz,

$$v_0^2 < c^2 \Rightarrow 1 + \left(\frac{Ft}{\gamma_0 m_0 v_0} \right)^2 < \frac{c^2}{v_0^2} + \left(\frac{Ft}{\gamma_0 m_0 v_0} \right)^2$$

por lo tanto

$$\frac{1 + \left(\frac{Ft}{\gamma_0 m_0 v_0} \right)^2}{\frac{1}{v_0^2} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{Ft}{\gamma_0 m_0 v_0^2} \right)^2} < c^2.$$

Esto nos lleva a deducir que

$$\begin{aligned} v^2(t) &= v_x^2(t) + v_y^2(t) = v_x^2(t) + \left(\frac{Ft}{\gamma_0 m_0 v_0} \right)^2 v_x^2 \\ &= \left[1 + \left(\frac{Ft}{\gamma_0 m_0 v_0} \right)^2 \right] v_x^2 \\ &= \frac{\left[1 + \left(\frac{Ft}{\gamma_0 m_0 v_0} \right)^2 \right]}{\left[\frac{1}{v_0^2} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{Ft}{\gamma_0 m_0 v_0^2} \right)^2 \right]} \\ &< c^2, \end{aligned} \tag{6}$$

es decir, para todo t, se tiene $v < c$.

Problema 3

La velocidad de la primera partícula es $\mathbf{v}_1 = -v_1 \hat{\mathbf{x}}$, con $v_1 = \frac{4}{5}c$, la de la segunda, $\mathbf{v}_2 = -v_2 \hat{\mathbf{y}}$, con $v_2 = \frac{3}{5}c$. Entonces. como no hay fuerzas externas, el momentum lineal se conserva y se tiene que el momentum inicial $\mathbf{p}_i$ es igual al momentum final $\mathbf{p}_f$:

$$\mathbf{p}_i = 0 = \gamma_1 m_0 v_1 (-\hat{\mathbf{x}}) + \gamma_2 m_0 v_2 (-\hat{\mathbf{y}}) + \gamma m_0 (v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{p}_f.$$

donde $\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}}$. De estas ecuaciones se deduce que

$$\gamma_1 m_0 v_1 = \gamma m_0 v_x \qquad \text{y} \qquad \gamma_2 m_0 v_2 = \gamma m_0 v_y.$$

Dividiendo estas dos ecuaciones se obtiene

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{\gamma_2}{\gamma_2}\frac{v_2}{v_1} = \frac{9}{16} = \tan\phi.$$

Si elevamos la primera ecuación al cuadrado, tenemos

$$\gamma_1^2 m_0^2 v_1^2 = \gamma^2 m_0^2 v_x^2$$

de donde obtenemos, al despejar v_x,

$$v_x^2 = \frac{v_1^2}{1 + \frac{v_1^2}{c^2}\tan\phi}$$

y dado que $v_y = v_x \tan^2\phi$, tenemos

$$v_y^2 = \frac{v_1^2}{\cot^2\phi + \frac{v_1^2}{c^2}}.$$

Con esto, la magnitud y dirección de la partícula resultante queda completamente determinada:

$$v_x = 2\sqrt{\frac{2}{17}}\,c,\;\; v_y = \frac{9}{4\sqrt{34}}\,c.$$

Para encontrar la razón M_0/m_0 usamos conservación de la energía:

$$E_i = M_0 c^2 = \gamma_1 m_0 c^2 + \gamma_2 m0 c^2 + \gamma m_0 c^2$$

lo que implica que

$$\frac{M_0}{m_0} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma = \frac{35}{12} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{34}{23}}\,.$$