Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Mecánica Cuántica I
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Felipe González C.

Solución Tarea 3

---

1. Para el potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & \text{para el resto} \end{cases}$$

la solución a la ecuación de Schrödinger da las autoenergías $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}$.

a) Las energías del estado base, del primer y del segundo estado son

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}, \quad E_2 = 4\frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \quad E_3 = 9\frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2},$$

respectivamente. Para el electrón, $m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg, $a = 10^{-10}$m , luego

$$E_1 = 37{,}6 \text{ eV}, \quad E_2 = 150{,}41 \text{ eV}, \quad E_3 = 338{,}43 \text{ eV}.$$

Para la esfera metálica, $m = 10^{-3}$ kg, $a = 10^{-2}$ m, luego

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= 5{,}29 \times 10^{-43} \text{ eV} = 8{,}46 \times 10^{-62} \text{ J}, \\ \bar{E}_2 &= 2{,}11 \times 10^{-42} \text{ eV} = 3{,}38 \times 10^{-61} \text{ J}, \\ \bar{E}_3 &= 4{,}76 \times 10^{-42} \text{ eV} = 7{,}62 \times 10^{-61} \text{ J}. \end{aligned}$$

b) Notamos que las energías $\bar{E}_i$ son mucho más pequeñas que las energías E_i, son demasiado pequeñas como para ser medidas por algún aparato de medición conocido. Por la misma razón, la discretización de niveles energéticos no se aprecia para la esfera metálica, ya que $\bar{E}_2 - \bar{E}_1 = 1{,}58 \times 10^{-42}$ eV es una diferencia indetectable por un aparato de medición, es decir, las energías que puede tomar la esfera se aprecian como un continuo. En cambio, para el electrón, $E_2 - E_1 = 112{,}81$ eV es una energía fácilmente detectable por un aparato de medición, lo que implica que es posible afirmar que el sistema no puede tener energías entre E_1 y E_2.

c) Dado que $\Delta x \sim \frac{a}{2}$, tenemos que

$$\Delta x \Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta p \sim \frac{\hbar}{2\Delta x} \sim \frac{\hbar}{a}.$$

Con esto, la velocidad "clásica" será

$$v = \frac{p}{m} = \frac{\hbar}{ma}.$$

Para el electrón tendremos $v_e = 1{,}15 \times 10^6$ m/s, mientras que para la esfera metálica, $v_{em} = 1{,}62 \times 10^{-29}$ m/s, es decir, la velocidad del electrón es tremendamente alta (0.004 veces la velocidad de la luz), mientras que para la esfera metálica es casi nula. Es por esta razón que los objetos macroscópicos los vemos en reposo cuando no hay fuerzas (potenciales) actuando sobre ellos.

2. Tenemos el mismo potencial que en el problema anterior, con $a = L$, para el cual las autofunciones y autoenergías son

   a)
   $$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}.$$

   b) El estado inicial del sistema es
   $$\psi(x,0) = Ax(x-L).$$
   Si lo normalizamos, obtenemos que
   $$1 = \langle \psi \, | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x) = \int_0^L |A|^2 x^2 (x-L)^2 = |A|^2 \frac{L^5}{30},$$
   es decir, $A = \sqrt{\frac{30}{L^5}}$.

   c) Dado que $\psi^*(x)\psi(x) \equiv \rho(x)$ es la densidad de probabilidad de la partícula, es decir, $\rho(x)dx$ es la probabilidad de encontrar a la partícula entre x y $x + dx$, tendremos que la probabilidad de encontrarla en el intervalo $[0, L/2]$ será
   $$\Pr(0, L/2) = \int_0^{\frac{L}{2}} \psi^*(x)\psi(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^L \psi^*(x)\psi(x) \, dx = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2},$$
   es decir, la probabilidad de encontrarla en la primera mitad del intervalo es de un 50 %.

   d) Claramente $|\psi\rangle$ no es un autoestado del sistema, pero al ser un estado del sistema, debe pertenecer al espacio de Hilbert del mismo, es decir, se puede obtener como una combinación lineal de la base del mismo. Como el conjunto de los autoestados $|\phi_n\rangle$ forma una base para este espacio, tenemos que
   $$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, |\phi_n\rangle \, .$$
   Si aplicamos $\langle \phi_m|$ a ambos lados, obtenemos
   $$\langle \phi_m \, |\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \langle \phi_m \, |\phi_n\rangle = a_m,$$
   por lo tanto
   $$\begin{aligned} a_n &= \langle \phi_n \, |\psi\rangle \\ &= \langle \phi_n| \left(\int dx \, |x\rangle \, \langle x| \right) |\psi\rangle \\ &= \int_0^L \phi_n^*(x)\psi(x) \, dx \\ &= \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sqrt{\frac{30}{L^5}} x(x-L) \, dx \\ &= \frac{4\sqrt{15}}{n^3\pi^3} \left(-1 + (-1)^n\right), \end{aligned}$$
   o bien,

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ -\frac{8\sqrt{15}}{n^3\pi^3} & n \text{ impar} \end{cases}$$

Con esto, la probabilidad de obtener E_5 en $t = 0$ está dada por

$$\Pr(E_5) = |\langle \phi_5 | \psi \rangle|^2 = |a_5|^2 = \left| -\frac{8\sqrt{15}}{5^3\pi^3} \right|^2 = \frac{192}{3125\pi^6} \approx 0{,}00639075\,\%.$$

e) La energía promedio en el estado $|\psi\rangle$ está dada por

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle_\psi &= \langle \psi | \check{\mathbf{H}} | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \frac{\check{\mathbf{p}}^2}{2m} | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \left(\int dx \, |x\rangle \langle x| \right) \frac{\check{\mathbf{p}}^2}{2m} | \psi \rangle \\
&= \int \langle \psi | x \rangle \langle x | \frac{\check{\mathbf{p}}^2}{2m} | \psi \rangle \, dx \\
&= \int_0^L \psi^*(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) \right) dx \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \int_0^L \sqrt{\frac{30}{L^5}} x(x-L) \left(2\sqrt{\frac{30}{L^5}} \right) dx \\
&= \frac{5\hbar^2}{mL^2}.
\end{aligned}$$

Otra manera de obtener este resultado es tomando la expansión de $|\psi\rangle$ en la base de los $|\phi_n\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle_\psi &= \langle \psi | \check{\mathbf{H}} | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \check{\mathbf{H}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n |\phi_n\rangle \\
&= \langle \psi | \sum_{n=1}^{\infty} a_n \check{\mathbf{H}} |\phi_n\rangle \\
&= \langle \psi | \sum_{n=1}^{\infty} a_n E_n |\phi_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n E_n \langle \psi | \phi_n \rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n E_n a_n^* \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} E_n |a_n|^2 \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\hbar^2\pi^2(2j+1)^2}{2mL^2} \left(-\frac{8\sqrt{15}}{(2j+1)^3\pi^3} \right)^2 \\
&= \frac{5\hbar^2}{mL^2}.
\end{aligned}$$