Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Física

Mecanica Cuantica I
Profesor: Miguel Kiwi
Ayudante: Felipe González C.

Tarea 3

18 de Abril de 2013

Entrega: 25 de abril de 2013

1. Es sabido que una partícula libre con momentum p tiene asociada una onda (plana) de probabilidad $\psi_p(x) = Ae^{i(kx-\omega t)} = Ae^{i(px/\hbar-\omega t)}$ (relación de de Broglie: $p = h/\lambda = \hbar k$). Ocupando la ortogonalidad de los autoestados de momentum $|p\rangle$ es posible demostrar que el valor de A viene dado, en una dimensión, por $(2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}}$, por lo que tenemos $\psi_p(x) \equiv \langle x|p\rangle = e^{ipx/\hbar}/\sqrt{2\pi\hbar}$. Esta es la representación de un autoestado de momentum $|p\rangle$ en el espacio de posiciones, y representa a una particula libre de momentum p.[1]

   a) Comente brevemente por qué es posible escribir un estado cualquiera $|\Psi\rangle$ como una "combinación lineal" de estas ondas planas. Escriba explícitamente esta expresión (en representación vectorial y en el espacio de posiciones) y determine los coeficientes, mostrando que corresponden básicamente a la transformada de Fourier de la función $\Psi(x)$. Muestre además, utilizando el postulado de Max Born, que corresponden justamente a la probabilidad de encontrar a la partícula con momentum p. Hint: El operador $\check{\mathbf{I}} = \int dx\, |x\rangle\langle x| = \int dp\, |p\rangle\langle p|$ le será útil. (0.25 ptos).

   b) Justifique por qué, en presencia de un potencial, estos autoestados de momentum no pueden ser autoestados del operador Hamiltoniano $\check{\mathbf{H}} = \frac{1}{2m}\check{\mathbf{p}}^2 + V(\check{\mathbf{x}})$. (0.25 ptos).

   c) El resultado anterior nos dice que, en general, un estado cuántico $|\Psi\rangle$ es la superposición de infinitos autoestados de momentum, lo cual equivale a superponer ondas planas $e^{ipx/\hbar}$ de distinta longitud de onda $\lambda = h/p$, es decir, la distribución de probabilidades $\Psi(x)$ es producto de un fenómeno de interferencia entre distintas ondas planas. Encuentre explícitamente esta superposición para un autoestado arbitrario del pozo infinito ($|\psi_n\rangle$ como combinación lineal de autoestados de momentum) y demuestre que la probabilidad de encontrar a la partícula con momentum p en el estado $|\psi_n\rangle$ está dada por

$$\mathcal{P}_n(p) = \frac{2n}{p^*\left[(n\pi)^2 - \left(\frac{p}{p^*}\right)^2\right]^2}\left[1 - (-1)^n \cos\left(\frac{p}{p^*}\right)\right],$$

   donde $p^* \equiv \hbar/L$, y L es el tamaño del pozo. Analice con cuidado el caso $p = n\pi p^*$. ¿Cuál es la probabilidad en ese caso? (2.5 ptos)

[1] Problema 1: 3.0 ptos. Problema 2: 3.0 ptos. Pto. Base: 1.0 pto.

2. Los observables posición y momentum tienen operadores hermíticos asociados $\check{\mathbf{x}}$ y $\check{\mathbf{p}}$, cuya relación de conmutación es $[\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{p}}] = i\hbar\check{\mathbf{I}}$. En varias dimensiones se cumple, $[\check{\mathbf{r}}_\alpha, \check{\mathbf{p}}_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha\beta}\check{\mathbf{I}}$ y $[\check{\mathbf{r}}_i, \check{\mathbf{r}}_j] = [\check{\mathbf{p}}_i, \check{\mathbf{p}}_j] = \check{\mathbf{0}}$. Demuestre las siguientes propiedades:

   a) Si $\mathcal{B}(x,p)$ es un observable físico, con

   $$\mathcal{B}(x,y) = \sum_{k\ell} x^k p^\ell,$$

   entonces $\check{\mathbf{B}} = \mathcal{B}(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{p}})$ satisface

   $$\left[\check{\mathbf{p}}, \check{\mathbf{B}}\right] \check{\mathbf{p}} = \check{\mathbf{p}} \left[\check{\mathbf{p}}, \check{\mathbf{B}}\right] + \mathcal{O}(\hbar^2),$$

   donde $\mathcal{O}(\hbar^2)$ corresponde a términos del orden de $\hbar^2$. (0.75 ptos)

   b) El conmutador entre el operador de momentum y una función f que depende de la posición en alguna coordenada está dado por (0.75 ptos)

   $$\left[f\left(\check{\mathbf{x}}_\alpha\right), \check{\mathbf{p}}_\beta\right] = i\hbar\frac{\partial f(\check{\mathbf{x}}_\alpha)}{\partial x_\alpha}\delta_{\alpha\beta}.$$

   c) El conmutador entre el operador de posicióin y una función f que depende del momentum en alguna coordenada está dado por (0.75 ptos)

   $$\left[f\left(\check{\mathbf{p}}_\alpha\right), \check{\mathbf{x}}_\beta\right] = -i\hbar\frac{\partial f(\check{\mathbf{p}}_\alpha)}{\partial p_\alpha}\delta_{\alpha\beta}.$$

   d) Evalúe los conmutadores $[e^{i\check{\mathbf{x}}}, \check{\mathbf{p}}]$, $[e^{i\check{\mathbf{x}}^2}, \check{\mathbf{p}}]$ y $[e^{i\check{\mathbf{x}}}, \check{\mathbf{p}}^2]$. (0.75 ptos)