Mecánica Estadística

Corrección Tarea 5

Universidad del Chile, Facultad de Ciencias,
Departamento de Física, Santiago, Chile

Ayudante: Felipe González
Profesor: David Gottlieb

12 de octubre de 2010

Problema 1

La energía de cada partícula está dada por

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2,$$

la cual representa la energía del gas libre menos la energía rotacional. La función partición por partícula será

$$Z_1 = \int \frac{d^3q\, d^3p}{h^3} e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} e^{\frac{\beta m\omega^2 r^2}{2}},$$

donde $d^3q = r\, dr\, d\theta\, dz$ y $d^3p = 4\pi p^2\, dp$. Integrando, se obtiene

$$Z_1 = (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} 2\pi L \frac{(e^{\frac{\beta m\omega^2 R^2}{2}} - 1)}{\beta m\omega^2 h^3}$$

Para conocer el número de partículas (promedio) entre r y $r + dr$, necesitamos conocer, en el fondo, la densidad promedio de partículas, esto es,

$$n(r) = N\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \frac{N}{r_i}\delta(r - r_i)\delta(\theta - \theta_i)\delta(z - z_i).$$

Notemos que esta cantidad tiene unidades de cantidad de partículas por unidad de volumen (V^{-1}), que es justamente la idea de densidad de partículas. Con esto,

$$< n(r) >= \frac{\int \frac{d^3q\, d^3p}{h^3} n(r) e^{-\beta(\frac{p_i^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2 r_i^2)}}{Z_1} = \frac{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}{Z_1} \int \frac{d^3q}{h^3} n(r) e^{\frac{\beta}{2}m\omega^2 r_i^2}.$$

Nuevamente $d^3q = r_i\, dr_i\, d\theta_i\, dz_i$, y notamos que por la forma de $n(r)$, las integrales sobre z_i y θ_i quedan simplemente reducidas a 1, mientras que la integral sobre r_i deja a la exponencial evaluada en r, es decir,

$$< n(r) >= \frac{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}{Z_1 h^3} N e^{\frac{\beta}{2}m\omega^2 r^2} = \frac{Nm\omega^2}{2\pi kTL} \frac{e^{\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}}}{e^{\frac{m\omega^2 R^2}{2kT}} - 1}.$$

El lector puede comprobar que $\int_0^R < n(r) > dr$ da exactamente N.

Problema 2

Tenemos un Hamiltoniano

$$\mathscr{H} = \frac{p^2}{2m} - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{E}$$

donde el segundo término es igual a $\mu E_z \cos\theta$, suponiendo el campo en z. Integrando sobre todo el ángulo sólido, tenemos

$$Z_1 = \int e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \, e^{\beta \mu E_z \cos\theta} \, d^3p \, \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \left(\frac{2\pi}{\beta m} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\sinh(\beta \mu E_z)}{\beta \mu E_z}.$$

Dado que la polarización está dada por

$$\mathbf{P} = \frac{N}{V} < \boldsymbol{\mu} >$$

tenemos

$$P_z = \frac{N}{V} < \mu \cos\theta >= \frac{N}{V} \frac{\partial \ln Z_1}{\partial(\beta E_z)} = \frac{N}{V} \mu \, L(\beta \mu E_z),$$

con $L(x)$ la función de Langevin.
Para altas temperaturas ($\beta \mu E_z \ll 1$), tenemos

$$\frac{P_z}{E_z} \approx \frac{N}{V} \frac{\mu^2}{3kT},$$

por lo tanto, como $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E}$, tenemos

$$\varepsilon = 1 + 4\pi \frac{P_z}{E_z} \approx 1 + 4\pi \frac{N}{V} \frac{\mu^2}{3kT}.$$

Problema 3

Tipos de estados: $\varepsilon_1 = 0$ (sitio desocupado), $\varepsilon_2 = \varepsilon - \mu H$ (ocupado paralelo), $\varepsilon_3 = \varepsilon + \mu H$ (ocupado antiparalelo). Luego

$$Z = (1 + e^{\varepsilon - \mu H} + e^{\varepsilon + \mu H})^N.$$

Con esto,

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = 2N \frac{\varepsilon \cosh(\beta \mu H) - \mu H \sinh(\beta \mu H)}{e^{\beta \varepsilon} + 2\cosh(\beta \mu H).}$$

$$M = \frac{\partial F}{\partial H} = \frac{\partial \ln Z}{\partial(\beta H)} = 2N\mu \frac{\sinh(\beta \mu H)}{e^{\beta \varepsilon} + 2\cosh(\beta \mu H)}.$$