UNIVERSIDAD DE CHILE
Departamento de Física
Física Contemporánea 2010

Solución tarea 6

Profesor: Mario Molina **Ayudante**: Felipe González

Problema 1

La función

$$\psi(x) = \begin{cases} A[\cos(\pi x/a) + 1] & |x| \leqslant a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

puede ser normalizada, imponiendo

$$1 =< \psi|\psi >= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x)\, dx = \int_{-a}^{a} A^2[\cos(\pi x/a) + 1]^2\, dx = 3aA^2$$

lo que implica que $A = \sqrt{\frac{1}{3a}}$. Por otro lado,

$$< x >= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)x\psi(x)\, dx = \int_{-a}^{a} A^2 x[cos(\pi x/a) + 1]^2\, dx = 0$$

ya que es la integral de una función impar sobre un intervalo simétrico, y

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)x\psi(x)\, dx = \int_{-a}^{a} A^2 x^2[cos(\pi x/a) + 1]^2\, dx = \frac{a^2}{3}\left(1 - \frac{15}{2\pi^2}\right),$$

luego

$$\delta x = \sqrt{< x^2 > - < x >^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - \frac{15}{2\pi^2}}\, .$$

Para el momentum se tiene

$$< p_x >= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)\psi(x)\, dx = -i\hbar\int_{-a}^{a} \psi(x)\psi'(x)\, dx = 0$$

y

$$< p_x^2 >= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)^2\psi(x)\, dx = -\hbar^2\int_{-a}^{a} \psi(x)\psi''(x)\, dx = \frac{\hbar^2\pi^2}{3a^2},$$

por lo tanto

$$\delta p_x = \sqrt{< p_x^2 > - < p_x >^2} = \frac{\hbar\pi}{a\sqrt{3}}.$$

Si la función se anula en la región $|x| > a$, es porque hay un potencial infinito en esta región, lo que define $x \pm a$ como las fronteras clásicas, que en este caso, coinciden con las fronteras cuánticas (no es posible hayar partículas en esta región).

Problema 2

La probabilidad de encontrar una partícula entre x_1 y x_2 está dada por

$$Pr = \int_{x_1}^{x_2} \psi^*(x)\psi(x)\,dx$$

donde ψ, por estar en el estado base de un pozo infinito, vale

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{a}{2} \\ \sqrt{\frac{2}{a}}\, \sin\left[\frac{\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right] & |x| < \frac{a}{2} \end{cases}$$

Resolviendo la integral para $x_1 = -\frac{a}{2}$, $x_2 = -\frac{a}{2} + 0{,}01\text{Å}$ y $a = 2\text{Å}$, se obtiene

$$Pr = \frac{1}{a}(x_2 - x_1) - \frac{1}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi x_1}{a}\right) + \frac{1}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi x_2}{a}\right) = 8{,}22 \times 10^{-7},$$

es decir, es casi imposible encontrar a la partícula en esa región.

Problema 3

a) Tenemos el potencial

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{4}{225}\sinh^2(x) - \frac{2}{5}\cosh(x)\right],$$

cuyo aspecto es el siguiente:

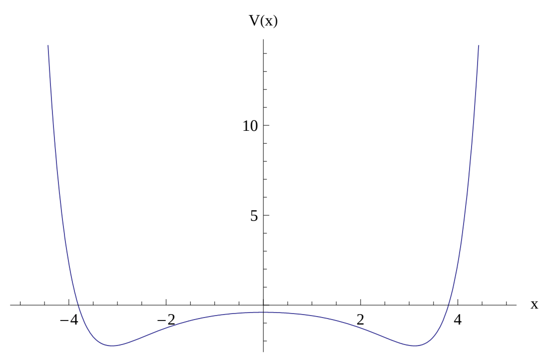

Figura 1: Potencial problema 3.

Los mínimos los encontramos tomando

$$0 = V'(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{8}{255}\sinh(x)\cosh(x) - \frac{2}{5}\sinh(x)\right]$$

es decir, x satisface

$$\frac{8}{255}\cosh(x) = \frac{2}{5}$$

por lo tanto, los mínimos están donde

$$\cosh(x) = \frac{45}{4}.$$

Esto se da para $x \approx \pm 3{,}11153$.

b) Si consideramos la función

$$\psi(x) = (1 + 4\cosh(x)) \exp\left[-\frac{2}{15}\cosh(x)\right],$$

la cual podemos escribir como

$$\psi(x) = \left(1 + 2e^{x} + 2e^{-x}\right) e^{\left[-\frac{2}{15}\cosh(x)\right]} = e^{-\frac{2}{15}\cosh(x)} + 2e^{x-\frac{2}{15}\cosh(x)} + 2e^{-x-\frac{2}{15}\cosh(x)},$$

que es más fácil de derivar. Podemos notar que

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &= e^{-\frac{2}{15}\cosh(x)}\left[-\frac{2}{15}\sinh(x) + 2e^{x}\left(1 - \frac{2}{15}\sinh(x)\right) + 2e^{-x}\left(-1 - \frac{2}{15}\sinh(x)\right)\right] \\
&= e^{-\frac{2}{15}\cosh(x)}\left[-\frac{2}{15}\sinh(x) + 4\sinh(x) - \frac{8}{15}\sinh(x)\cos(x)\right] \\
&= e^{-\frac{2}{15}\cosh(x)}\left[\frac{58}{15}\sinh(x) - \frac{4}{15}\sinh(2x)\right] \\
&= e^{-\frac{2}{15}\cosh(x)}\left[\frac{29}{15}(e^{x} - e^{-x}) - \frac{2}{15}(e^{2x} - e^{-2x})\right] \\
&= \frac{29}{15}\left[e^{x-\frac{2}{15}\cosh(x)} - e^{-x-\frac{2}{15}\cosh(x)}\right] - \frac{2}{15}\left[e^{2x-\frac{2}{15}\cosh(x)} - e^{-2x-\frac{2}{15}\cosh(x)}\right]
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\psi''(x) = e^{-\frac{2}{15}\cosh(x)} &\left\{\frac{29}{15}\left[e^{x}\left(1 - \frac{2}{15}\sinh(x)\right) - e^{-x}\left(-1 - \frac{2}{15}\sinh(x)\right)\right]\right. \\
&\left.-\frac{2}{15}\left[e^{2x}\left(2 - \frac{2}{15}\sinh(x)\right) - e^{-2x}\left(-2 - \frac{2}{15}\sinh(x)\right)\right]\right\} \\
= e^{-\frac{2}{15}\cosh(x)} &\left\{\frac{29}{15}\left[2\cosh(x) - \frac{2}{15}\sinh(x)2\sinh(x)\right] - \frac{2}{15}\left[4\cosh(2x) - \frac{2}{15}\sinh(x)2\sinh(2x)\right]\right\} \\
= e^{-\frac{2}{15}\cosh(x)} &\left\{\frac{29}{15}\left[2\cosh(x) - \frac{4}{15}\sinh^2(x)\right] - \frac{2}{15}\left[4\cosh(2x) - \frac{4}{15}\sinh(2x)\right]\right\} \\
= \frac{2}{225}&e^{-\frac{2}{15}\cosh(x)}\left(29 + 433\cosh(x) - 89\cosh(2x) + 2\cosh(3x)\right) \\
= \frac{2}{225}&e^{-\frac{2}{15}\cosh(x)}\left(29 + 433\cosh(x) - 89[2\cosh^2(x) - 1] + 2[4\cosh^3(x) - 3\cosh(x)]\right) \\
= \frac{2}{225}&e^{-\frac{2}{15}\cosh(x)}\left(118 + 427\cosh(x) - 178\cosh^2(x) + 8\cosh^3(x)\right)
\end{aligned}$$

Ahora bien, queremos comprobar si ψ satisface la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

con E la energía asociada al estado ψ, o bien

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + V(x) = E.$$

Esto nos dice que ψ''/ψ debiera ser una funcion que, al ser sumada con el potencial, da una constante. Recordamos que el potencial es

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{4}{225}\sinh^2(x) - \frac{2}{5}\cosh(x)\right] = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{4}{225}\cosh^2(x) - \frac{4}{225} - \frac{2}{5}\cosh(x)\right],$$

por lo tanto ψ''/ψ tiene que ser una serie de potencias de cosh, es decir,

$$\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = \alpha + \beta \cosh(x) + \gamma \cosh^2(x)$$

ya que sólo una combinación de este estilo eliminaría los términos cosh y $\cosh^2$ en el potencial V, dejando $-\frac{4}{225}\frac{\hbar^2}{2m} - \alpha$ como la única constante libre, es decir, E.
Tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} &= \frac{\frac{2}{225} e^{-\frac{2}{15}\cosh(x)} \left(118 + 427\cosh(x) - 178\cosh^2(x) + 8\cosh^3(x)\right)}{e^{-\frac{2}{15}\cosh(x)}(1 + 4\cosh(x))} \\
&= \frac{\frac{2}{225}\left(118 + 427\cosh(x) - 178\cosh^2(x) + 8\cosh^3(x)\right)}{(1 + 4\cosh(x))} \\
&= \frac{\frac{2}{225}\left(118 + 427z - 178z^2 + 8z^3\right)}{(1 + 4z)}
\end{aligned}$$

donde $z = \cosh(x)$. Ahora bien, sabemos que esta división debería generar algo de la pinta $\alpha + \beta z + \gamma z^2$ por las razones dadas anteriormente, lo cual significa precisamente que estos dos polinomios en z son divisibles. Recordando nuestros conocimientos de álgebra básica, desarrollamos la división polinomial, que debería dar resto cero:

$$\begin{array}{rcl}
(8z^3 - 178z^2 + 427z + 118) : (1 + 4z) & = & 2z^2 - 45z + 118 \\
-(8z^3 + 2z^2) \qquad\qquad\qquad & & \\
\hline
-180z^2 + 427z + 118 & & \\
-\left(-180z^2 - 45z\right) \qquad & & \\
\hline
472z + 118 & & \\
-\left(472z + 118\right) & & \\
\hline
0. & &
\end{array}$$

En efecto, estos dos polinomios son divisibles, lo que significa que

$$(8z^3 - 178z^2 + 427z + 118) = (1 + 4z)(2z^2 - 45z + 118).$$

El lector puede comprobar que la multiplicación de los términos a la derecha efectivamente genera el polinomio de la izquierda. Con este resultado, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} &= \frac{\frac{2}{225}\left(118 + 427\cosh(x) - 178\cosh^2(x) + 8\cosh^3(x)\right)}{(1 + 4\cosh(x))} \\
&= \frac{2}{225}\frac{\left(118 + 427\cosh(x) - 178\cosh^2(x) + 8\cosh^3(x)\right)}{(1 + 4\cosh(x))} \\
&= \frac{2}{225}(2\cosh^2(x) - 45\cosh(x) + 118) \\
&= \frac{4}{225}\cosh^2(x) - \frac{2}{5}\cosh(x) + \frac{236}{225}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + V(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{4}{225}\cosh^2(x) - \frac{2}{5}\cosh(x) + \frac{236}{225}\right] + \frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{4}{225}\cosh^2 - \frac{4}{225} - \frac{2}{5}\cosh(x)\right] \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{236}{225} + \frac{4}{225}\right] \\
&= -\frac{16}{15}\frac{\hbar^2}{2m}.
\end{aligned}$$

De esta forma, hemos conseguido demostrar que

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x) = -\frac{16}{15}\frac{\hbar^2}{2m}\psi(x),$$

es decir, que ψ satisface la ecuación de Schrödinger con $E = -\frac{16}{15}\frac{\hbar^2}{2m}$ el correspondiente autovalor de energía.

c) Graficando ψ y V en el mismo gráfico, obtenemos la siguiente figura:

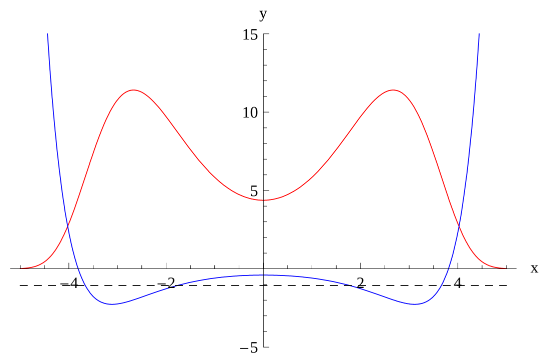

Figura 2: Potencial V (azul) y función de onda solución ψ (rojo) tomando $\frac{\hbar^2}{2m} = 1$. La energía esta representada por la linea punteada en negro $\left(E = -\frac{16}{25}\right)$.

Notamos que, como debe ser, la energía es mayor que el mínimo del potencial, como debe suceder en cualquier problema físico. Por otro lado, notamos que estos "montes" que presenta la función de onda, son regiones en donde la probabilidad de encontrar a la partícula (la integral de ψ) es mayor, lo que nos permite concluír que es más probable encontrar a la partícula en torno a los mínimos de potencial, y menos probable (aunque factible) encontrarla en torno a $x = 0$.

Un potencial de este estilo puede representar la posición angular θ de un péndulo simple, midiendo los ángulos desde la horizontal. El péndulo oscila en torno a $\theta = -\frac{\pi}{2}$, el cual representa al mínimo del potencial a la izquierda (punto de equilibrio estable). Si el péndulo es perturbado en dirección horaria, este puede dar la vuelta completa y empezar a oscilar en torno a $\theta = \frac{3}{2}\pi$. Es punto $x = 0$ viene a representar la cúspide $(\theta = \frac{\pi}{2})$ el cual es un punto de equilibrio inestable (cualquier perturbación lo haría caer en un mínimo del potencial).