Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática II
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Dany López

Guía 1

Lunes 20 Agosto 2012; **Tarea: 9, 10, 17.**, para Lu. 28 Agosto.

Sucesiones de Funciones

1. *a*) Pruebe la desigualdad de Schwartz y la desigualdad triangular utilizando los axiomas que definen el producto interno.
   b) Encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que esta desigualdad se transforme en igualdad.
2. Muestre que la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{x}{n}$, con n perteneciente a los naturales y $x \in [0,1]$, converge puntualmente a la función $f(x) = 0$.
3. Considere la sucesión de funciones $f_n(x) = x^n$, con n perteneciente a los naturales y $x \in [0,1]$. Estudie su convergencia puntual.
4. Estudie la convergencia puntual, uniforme y en la norma de la sucesión de funciones dada por $f_n(x) = xe^{-nx}$, con n perteneciente a los naturales y $x \in [0,1]$.
5. Analice la convergencia puntual de la sucesión de función dada por $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ con $x \in [0,\infty]$
6. Analice y demuestre por definición la convergencia uniforme de $f_n : [0,\infty] \to \mathbb{R}$ con $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$
7. Estudie la convergencia en la norma de $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2}$, $x \in [0,5]$

Ortonormalización de Gram-Schmidt

8. Considere el conjunto de funciones $\{x^n\sqrt{1-x^2}\}$, con n perteneciente a los naturales y donde $-1 < x < 1$. Encuentre las primeras 4 funciones ortonormales.
9. Considere el espacio de funciones reales continuas en el intervalo [-1,1].
   a) Muestre que
   $$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$
   es un buen producto interno en este espacio.
   b) Considere el conjunto de funciones $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$, con $-1 < x < 1$. Encuentre el conjunto de funciones ortonormales correspondientes. Esos son los primeros 5 polinomios de Legendre.
   c) Además, exprese la función $f(x) = x^2 - 1$ respecto a la base encontrada.
10. Considere el espacio de los polinomios reales de grado igual o menor que n.

a) Muestre que

$$(f|g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\exp(-x^2/2)dx$$

es un buen producto interno en este espacio.

b) A partir de los polinomios $1, x, x^2, x^3, x^4$, construya los primeros cinco polinomios ortogonales con respecto al producto definido en a). Esos son los primeros 5 polinomios de Hermite.

11. Considere el conjunto de funciones $\{e^x, e^{2x}\}$, donde $-1 < x < 1$. Encuentre el conjunto de funciones ortonormales correspondientes.

12. Muestre que el siguiente conjunto de funciones es un conjunto ortonormal en $[-\pi, \pi]$.

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}\right\}$$

13. Muestre que el siguiente conjunto de funciones es un conjunto ortonormal en $[0, \pi]$.

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 3x\right\}$$

14. Muestre que el siguiente conjunto de funciones es un conjunto ortonormal en $[0, \pi]$.

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 3x\right\}$$

Otros ejercicios.

15. *a*) Pruebe la desigualdad de Schwartz y la desigualdad triangular utilizando los axiomas que definen el producto interno.

    b) Encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que esta desigualdad se transforme en igualdad.

16. *a*) Sea $\{\{\phi_k\}_{k\in I}\}$ un conjunto discreto de vectores ortonormales. Demuestre que para todo vector arbitrario $|\psi\rangle$ arbitrario se satisface la desigualdad de Bessel:

$$||\psi||^2 \geq \sum_k |\langle\phi_k|\psi\rangle|^2.$$

    ¿En que caso se verifica la igualdad?

    b) Demuestre que el conjunto $\{\phi_k(t) = T^{-1/2}e^{2\pi ikt/T}\}_{k\in Z}$ es un conjunto ortonormal completo en $L^2[0, T]$

17. Aproxime en la norma la funciones i) $f(x) = \cos(\pi x/2)$ y ii) $|x|$, con x en [-1,1], usando como base de funciones ortonormales el sub-conjunto $P_l(x)$ con $l = 0, 1, 2, 3$ y P_l los polinomios de Legendre.

    a) Calcule el error obtenido analizando la desigualdad de Bessel y haga un gráfico de las funciones exacta, aproximadas y aproximantes. Comente la forma en que se lleva a cabo la aproximación.

    b) Compare para la función i) la aproximación polinomial y la respectiva serie deTaylor hasta orden 3. Haga un gráfico para comparar la función exacta y estas dos aproximaciones y comente. ¿Qué ocurre con el ejemplo ii)? ¿Hay serie de Taylor allí?