Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática II
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Dany López

Guía 2

Jueves 29 Agosto 2012; **Tarea: 8, 17, 26, 29**, para el Ju. 6 de Septiembre.

Paridad Funciones

1. Determinar si las siguientes funciones son par, impar o ninguna de las dos.
   a) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$
   b) $f(x) = x^{1/3} - \sin x$
   c) $f(x) = e^x$
   d) $f(x) = x^3 + \sin 2x$
   e) $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$
   f) $f(x) = e^{-x}\cos 3x$

2. Evaluar las siguientes integrales cuando m y n son enteros positivos.
   a) $\int_{-T}^{T} \sin\left(\frac{m\pi x}{T}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$
   b) $\int_{-T}^{T} \sin\left(\frac{m\pi x}{T}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$
   c) $\int_{-T}^{T} \cos\left(\frac{m\pi x}{T}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$

Series de Fourier de periodo 2π

3. Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi < x < 0 \\ x & , \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

4. Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & , \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

5. Calcular la serie de Fourier de $f(x) = x$, donde $-\pi < x < \pi$.

6. Calcular la serie de Fourier de $f(x) = x^2$, donde $-\pi < x < \pi$.

7. Calcular la serie de Fourier de $f(x) = e^x$, donde $-\pi < x < \pi$.

Series de Fourier de periodo arbitrario

8. Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = |x|$$

donde $-1 < x < 1$. Dibuje, en un mismo gráfico, las sumas parciales con 1, 2, 3, 4 y 5 términos, junto con $f(x)$. Luego grafique las sumas parciales de Fourier $S_n(x)$ con $n = 50, 60, 70$ y verifique el fenómeno de Gibbs.

9. Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -2 < x < 0 \\ x & , \quad 0 < x < 2 \end{cases}$$

10. Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -2 < x < -1 \\ k & , \quad -1 < x < 1 \\ 0 & , \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

11. Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -T/2 < x < 0 \\ E \sin wx & , \quad 0 < x < T/2 \end{cases}$$

12. Calcular la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -2 < x < 0 \\ e^{-t} & , \quad 0 < x < 2 \end{cases}$$

Series de Fourier de mitad de periodo

13. Encontrar la serie de Fourier de $f(x) = 1$, donde $0 < x < \pi$.
14. Encontrar la serie de Fourier de $f(x) = x^2$, donde $0 < x < l$.
15. Encontrar la serie de Fourier de $f(x) = 1 - \frac{x}{l}$, donde $0 < x < l$.
16. Encontrar la serie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{l} x & , \quad 0 < x < l/2 \\ \frac{2k}{l}(l - x) & , \quad l/2 < x < l \end{cases}$$

Derivación e Integración de Series de Fourier

17. Considere la función $f(x) = x$, con $-\pi < x < \pi$ y $f(-\pi) = f(\pi) = 0$.

 a) Muestre que en todos los puntos donde $f(x)$ es contínua, se puede representar por la serie
 $$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \operatorname{sen}(nx)$$

 b) Grafique $S_\nu(x) = 2 \sum_{n=1}^{\nu} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \operatorname{sen}(nx)$ para $\nu = 1, 2, 3, 4$ en el intervalo $[-3\pi/2, 3\pi/2]$ y observe como S_ν converge hacia $f(x)$.

 c) Derive la serie de Fourier (término a término) obtenida en a) y estudie su convergencia. ¿Es lícito derivar la serie de la función $f(x)$?

 d) ¿Cuántos términos de la serie hay que incluir para que el error entre la serie y la función $f(x)$ sea menor al 1 % para $x = \pi/2$?

e) Muestre que $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$, o sea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} = \frac{\pi}{4}.$$

f) Muestre que la integración de la serie de Fourier de $f(x) = x$, donde $-\pi < x < \pi$, conduce a

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

18. Determinar la función representada por la serie obtenida a partir de integrar cada término, desde $-\pi$ a x, de la serie

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

donde $f(x) = x$ y $-\pi < x < \pi$.

19. Determinar la función representada por la serie obtenida a partir de integrar cada término, desde $-\pi$ a x, de la serie

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)}{2n+1} x$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & , \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

20. Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi + x) & , \quad -\pi \le x < 0 \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & , \quad 0 < x \le \pi \end{cases}$$

Mostrar, mediante integración, que

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \begin{cases} \frac{(\pi+x)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} & , \quad -\pi \le x \le 0 \\ \frac{(\pi-x)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} & , \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Series de Fourier en Ecuación del Calor

21. Resuelva la ecuación del calor para las condiciones dadas.

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 7\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & , & t > 0 \\ u(x,0) = 3\sin(2x) - 6\sin(5x) & , & 0 < x < \pi \end{array}$$

22. Resuelva la ecuación del calor para los distintos casos de $f(x)$.

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & , & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & , & 0 < x < \pi \end{array}$$

a) $f(x) = \sin x - 6\sin(4x)$

b) $f(x) = \sin(3x) + 5\sin(7x) - 2\sin(13x)$

c) $f(x) = \sin(x) - 7\sin(3x) + \sin(5x)$

d) $f(x) = \sin(4x) + 3\sin(6x) - \sin(10x)$

23. Determine la solución del problema de flujo de calor

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & , \quad t > 0 \end{array}$$
$$u(x,0) = \begin{cases} x & , \quad 0 < x \le \pi/2 \\ \pi - x & , \quad \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$$

24. Determine la solución del problema de flujo de calor para los distintos casos de $f(x)$.

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \end{array}$$

a) $f(x) = 1 - \cos(2x)$

b) $f(x) = x(\pi - x)$

c) $f(x) = \begin{cases} -x & , \quad 0 < x \le \pi/2 \\ x - \pi & , \quad \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$

25. Determine la solución de ecuación del calor para las siguientes condiciones dadas

a)
$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x,0) = (1-x)x^2 & , \quad 0 < x < 1 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x,0) = x^2 & , \quad 0 < x < \pi \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x,0) = x & , \quad 0 < x < \pi \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x,0) = x(1-x) & , \quad 0 < x < 1 \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 1\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x,0) = e^x & , \quad 0 < x < \pi \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 7\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x,0) = 1 - \sin x & , \quad 0 < x < \pi \end{array}$$

g)

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = 5, u(\pi,t) = 10 & , \quad t > 0 \\ u(x,0) = \sin(3x) - \sin(5x) & , \quad 0 < x < \pi \end{array}$$

Series de Fourier en Ecuación de la Onda

26. Considere una cuerda homogénea de largo L y de densidad ρ sometida a una tensión τ. Sea $u(x,t)$ el desplazamiento de la cuerda en el instante t y lugar x, que satisface la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

con $c = \sqrt{\tau/\rho}$ la velocidad de propagación. La cuerda esta fija en ambos extremos (i.e. $u(0,t) = u(L,t) = 0$) y el desplazamiento inicial $u(x,0)$ es igual a hx/ξ para $0 < x < \xi$ y $h(L-x)/(L-\xi)$ para $\xi < x < L$.

Muestre que el movimiento de la cuerda puede ser representado por

$$u(x,t) = \frac{2hL^2}{\pi^2 \xi (L-\xi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(\frac{n\pi\xi}{L}) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{L}) \cos(\frac{n\pi c t}{L}).$$

27. Resuelva la ecuación de la onda para las condiciones iniciales dadas.

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x,0) = \sin(3x) - 4\sin(10x) & , \quad 0 < x < \pi \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 2\sin(4x) + \sin(6x) & , \quad 0 \le x \le \pi \end{array}$$

28. Determine la solución de la ecuación de onda para las siguientes condiciones dadas

a)

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x,0) = x(1-x) & , \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sin(7\pi x) & , \quad 0 < x < 1 \end{array}$$

b)

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & ,\quad 0 < x < \pi, t > 0 \\
u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & ,\quad t > 0 \\
u(x,0) = \sin^2 x & ,\quad 0 < x < \pi \\
\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 1 - \cos x & ,\quad 0 < x < \pi
\end{array}
$$

c)

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & ,\quad 0 < x < \pi, t > 0 \\
u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & ,\quad t > 0 \\
u(x,0) = x^2(\pi - x) & ,\quad 0 < x < \pi \\
\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 & ,\quad 0 < x < \pi
\end{array}
$$

d)

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & ,\quad 0 < x < \pi, t > 0 \\
u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & ,\quad t > 0 \\
u(x,0) = \sin(4x) + 7\sin(5x) & ,\quad 0 < x < \pi \\
\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \begin{cases} x & , \quad 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x & , \quad \pi/2 < x\pi \end{cases} &
\end{array}
$$

29. Considere una barra de metal puesta horizontalmente, apoyada sólo en los extremos (en $x = 0$ y $x = L$). La barra está cargada con una carga en función de la posición $q(x) = ax/L$ por unidad de longitud.

    La barra, producto de la carga, tiene una deflexión que esta dada por la ecuación diferencial

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{R}$$

    donde R es la rigidez de la barra.

    a) Obtenga la deflexión de la barra en términos de una serie de Fourier. La solución es

$$y(x) = \frac{2aL^4}{R\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

    b) Encuentre la solución en forma cerrada (integrando directamente la ecuación diferencial). Compare en un gráfico ambas soluciones.