Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática I
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Dany López

Guía 3: Coordenadas curvilíneas
Lunes 9 de abril 2012
Tarea: 3 y 6. Entrega Jueves 19 Abril.

Transformación entre sistemas cartesianos

1. Obtener la matriz de transformación de coordenadas que relaciona el sistema prima con el sistema no prima de la Figura 1. Luego, obtener la matriz de transformación de coordenadas inversa. Por último, escribir ambas matrices en notación de Einstein.

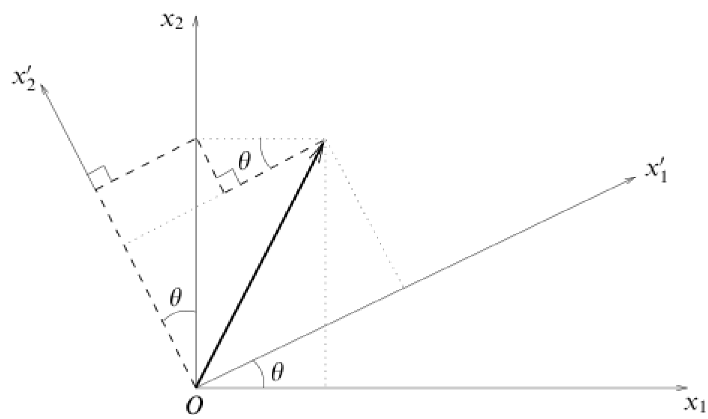

Figura 1: Sistemas prima y no prima.

2. Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, identifique los elementos de la matriz de transformación desde el sistema no primado al sistema primado. Posteriormente, utilizando los elementos encontrados, formar la matriz. Luego, obtener la transformación inversa. Finalmente, para una base ortonormal en el sistema no primado, probar si las transformaciones conservan la ortonormalidad de ella.

   a) $x_1' = 1/\sqrt{3}x_1 + 1/\sqrt{3}x_2 + 1/\sqrt{3}x_3$, $x_2' = 1/\sqrt{2}x_2 - 1/\sqrt{2}x_3$, $x_3' = 2/\sqrt{6}x_1 - 1/\sqrt{6}x_2 - 1/\sqrt{6}x_3$

   b) $x_1' = 6/\sqrt{5}x_1 - 2x_2$, $x_2' = 1/\sqrt{3}x_1 + 7/\sqrt{6}x_2 - x_3$, $x_3' = x_1 + x_2 + x_3$

   c) $x_1' = \sqrt{2}/2x_1 + \sqrt{2}/2x_2$, $x_2' = \sqrt{2}/2x_1 - \sqrt{2}/2x_2$, $x_3' = x_3$

Coordenadas curvilíneas

3. Sea el vector $\vec{v} = 4\hat{e}_1 + 8\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3$ expresado en un sistema de coordenadas no primado.

   a) Exprese este vector en el nuevo sistema de coordenadas primado obtenido de la relación $x_1' = \cos\psi x_1 + \sin\psi\cos\theta x_2 + \sin\psi\sin\theta x_3$, $x_2' = -\sin\psi x_1 + \cos\psi\cos\theta x_2 + \cos\psi\sin\theta x_3$ y $x_3' = -\sin\theta x_2 + \cos\theta x_3$.

b) Sean $\theta = \pi/2$, $\psi = \pi/4$ y el vector $\vec{v}' = -4\hat{e}_1' + 2\hat{e}_2' + 2\hat{e}_3'$. Exprese este vector en el sistema de coordenadas no primado.

c) Para los valores anteriores de θ y ψ, transformar la base canónica del sistema no primado al sistema primado. Luego, verificar si esta nueva base es ortonormal. Repetir el procedimiento partiendo de la base canónica del sistema primado.

d) Nuevamente para los valores anteriores de θ y ψ, muestre que la matriz de transformación entre los sistemas de coordenadas es ortogonal.

4. Cierto vector se expresa en un sistema cartesiano en la forma $\vec{V} = \hat{e}_x + \hat{e}_y + \hat{e}_z$.

   a) Si este vector existe en el punto cartesiano $(1, 2, 1)$, encuentre las componentes en coordenadas cilíndricas.

   b) Si este vector existe en el punto cartesiano $(1, 2, 1)$, encuentre las componentes en coordenadas esféricas.

   c) Si este vector existe en el punto cartesiano $(0, 0, 1)$, encuentre las componentes en coordenadas cilíndricas.

   d) Si este vector existe en el punto cartesiano $(0, 0, 1)$, encuentre las componentes en coordenadas esféricas.

5. Un disco rota, centrado en el origen de coordenadas de un sistema cartesiano xy, con velocidad angular constante.

   a) ¿Cuál es la velocidad del punto (1,1) expresada en un sistema cartesiano?

   b) ¿Cuál es la velocidad del punto (1,1) expresada en coordenadas polares?

6. El sistema de cordenadas elípticas (u, v, z) se relaciona con el sistema cartesiano a través de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= a \cosh u \cos v \\ y &= a \sinh u \operatorname{sen} v \\ z &= z \end{aligned}$$

   a) Dibuje las líneas de u constante y v constante en una malla bidimensional xy, con z constante.

   b) Obtenga los factores de escala h_i.

   c) Obtenga los diferenciales de posicion ($d\vec{r}$) , de área y de volumen, usados para formar las integrales delínea, área y volumen.

   d) Obtenga las expresiones para el gradiente, divergencia y rotor.

   e) Exprese el vector posición en el sistema elíptico.

7. Calcule la integral de superficie

$$\iint_S d\vec{\sigma} \cdot \vec{F},$$

   donde $\vec{F} = 2 \sin\theta \sin\phi \hat{e}_r + 3 \cos\theta \cos\phi \hat{e}_\phi + 4 \cos\theta \cos\phi \hat{e}_\theta$ y S es el octante $x > 0, y > 0, z > 0$ de una esfera de radio 2, centrada en el origen del sistema de coordenadas.

8. Considere una esfera de radio r_0, rotando con velocidad angular constante ω_0 alrededor del eje Z, de manera que $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{e}_z$.

   a) Encuentre una expresión para el vector velocidad $\vec{v}$ de un punto de la superficie de la esfera, usando coordenadas esféricas y vectores bases esféricos. Recuerde que $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

   b) Obtenga la integral de línea

   $$\oint d\vec{r} \cdot \vec{v}$$

   alrededor del ecuador de la esfera.

Transformaciones en Sistema curvilíneos

9. Obtener los factores de escala h_i a partir de los diferenciales de línea correspondientes a las coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas respectivamente.

10. Las relaciones entre coordenadas cilíndricas y cartesianas están dadas por $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $z = z$. Obtener los factores de escala h_i correspondientes a las coordenadas cilíndricas de acuerdo a los siguientes pasos.

    a) Escriba el vector posición en base a $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ y en función de ρ , ϕ , z.

    b) A partir del vector posición, obtenga tres vectores que estén en las direcciones de $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ y $\hat{z}$ respectivamente. Notar que esto provocará que los vectores obtenidos sean linealmente independientes.

    c) Normalice los vectores obtenidos. Las constantes de normalización corresponden a los factores de escala.

11. Las relaciones entre coordenadas esféricas y cartesianas están dadas por $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$. A partir de ello, repetir ejercicio 10.

12. Volviendo a considerar las igualdades que relacionan un sistema de coordenadas cilíndricas con un sistema de coordenadas cartesianas, realizar los siguientes pasos:

    a) Utilizando las relaciones dadas y los factores de escala obtenidos de los ejercicios 9 y 10, calcular los coeficientes a_{ij} de la matriz de transformación que va desde las coordenadas cilíndricas a las cartesianas.

    b) Obtener los coeficientes de la matriz de transformación inversa. ¿Qué representa esta matriz?

13. Considerando las igualdades que relacionan un sistema de coordenadas esféricas con un sistema de coordenadas cartesianas, repetir el ejercicio 12 para este caso.

14. Encuentra la matriz de la transformación que va desde las coordenadas cilíndricas a las esféricas.

15. Las coordenadas de un sistema hiperbólico se relacionan con las coordenadas cartesianas mediante las ecuaciones

    $$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 \\ v &= 2xy \\ z &= z \end{aligned}$$

Determine los elementos de la matriz que transforma las componentes cartesianas de un vector en componentes hiperbólicas. Usando esta matriz y el vector posición expresado en el sistema cartesiano, exprese el vector posición en el sistema hiperbólico.

16. Para el sistema de coordenadas elípticas descrito en el problema 6, determine la matriz de transformación $[a]$ que convierte las componentes de un vector del sistema cartesiano al sistema elíptico. ¿Que significa la matriz inversa $[a]^{-1}$