Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática II
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Dany López

Guía 5

Jueves 28 de sept./ Jue. 4 oct. 2012; Tarea: 2; 4; 6 b), d); 8 a), b); 9. para Lu. 15 Oct.

Sucesión de Distribuciones

1. Sea

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -\frac{1}{2n} \\ n & , \quad -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n} \\ 0 & , \quad \frac{1}{2n} < x \end{cases}$$

Muestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_n(x)dx = f(0)$$

suponiendo que $f(x)$ es continua en $x = 0$.

2. Verifique que la secesión $\delta_n(x)$ dada por

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ ne^{-nx} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

es una sucesión delta. Note que la singularidad está en $+0$, el lado positivo del origen. Sugerencia: Remplace el límite superior $+\infty$ por c/n, donde c es grande pero finito y utilice el teorema del valor medio.

3. Demuestre que la siguiente sucesión es una representación de la delta

$$\delta_n(t) = \frac{1}{2\pi n}\left[\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2$$

Para ello, muestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi n}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2 dt = f(0)$$

4. Muestre que $\delta_n = \frac{\sin(nx)}{\pi x}$ es una distribución delta. Realice esto demostrando que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\sin nx}{\pi x}dx = f(0)$$

Suponga que $f(x)$ es continua en $x = 0$ y que se anula para $x \to \pm\infty$.

Sugerencia: Reemplace x por y/n y tome el límite $n \to \infty$ antes de integrar. Le puede ser útil la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \pi$.

Distribución Delta de Dirac y sus Propiedades

5. Simplifique la siguiente integral, considerando a y b constantes reales positivas.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(-ax+b)dx$$

6. Calcule las siguientes integrales

   a) $\int_{-3}^{0} \delta(x-1)dx$
   b) $\int_{-\infty}^{\infty}(x^2+3)\delta(x-5)dx$
   c) $\int_{-5}^{5} x\delta(x^2-5)dx$
   d) $\int_{0}^{2\pi} \delta(\cos x)dx$
   e) $\int_{-10}^{10}(x^2+3)\frac{d\delta(x-5)}{dx}dx$

Teoría de Distribuciones

7. Sea ϕ_n una sucesión de distribuciones en $\bar{\mathcal{S}}^*$. Si $\phi_n \to \phi \in \bar{\mathcal{S}}^*$ cuando $n \to \infty$, entonces $\phi_n' \to \phi' \in \bar{\mathcal{S}}^*$ cuando $n \to \infty$. Considere

$$g_n(x) = \begin{cases} n & , \quad |x| \leq 1/2n \\ 0 & , \quad |x| > 1/2n \end{cases}$$

   a) A partir de lo anterior, muestre que $g_n \to \delta$ débilmente si $n \to \infty$.
   b) Evalúe $\bar{g_n}'$
   c) Para una función $f \in \mathcal{S}$ arbitraria, evalúe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \langle \bar{g_n}' | f \rangle$$

8. Calcule

   a) $\left\langle \delta\left(\frac{x^2-a^2}{A^2}\right)|f\right\rangle$
   b) $\left\langle \bar{x}^2\delta^{(2)}(x)|f\right\rangle$
   c) $\left\langle \delta_a'|e^{-t^2/\tau^2}\cosh(it/\tau)\right\rangle$
   d) $\langle t\delta + t^2\delta'|x\rangle$

9. Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\delta'\left[\frac{1}{4}(x^2-a^2)\right]dx$$