Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática I
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Dany López

Guía 5a: Sistemas de coordenadas no ortogonales

Viernes 20 de abril de 2012; Tarea: 5, 7c ,10 y 15, para el Viernes 27 Abril.

Sistemas de Coordenadas no Ortogonales

1. Cada uno de los siguientes conjuntos de vectores (linealmente independiente entre ellos) proporcionan las direcciones de un cierto sistema de coordenadas. Señale si éstos si forman un sistema ortogonal o no. ¿De que manera influye esto en el producto interno entre vectores?

   a) $\vec{v}_1 = \hat{e}_1 + \hat{e}_2$, $\vec{v}_2 = -2\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2$

   b) $\vec{v}_1 = \hat{e}_3$, $\vec{v}_2 = 3\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3$, $\vec{v}_3 = 1\hat{e}_2 + 1\hat{e}_3$

   c) $\vec{v}_1 = -1/\sqrt{2}\hat{e}_1 + 1/\sqrt{2}\hat{e}_2$, $\vec{v}_2 = -1/\sqrt{2}\hat{e}_1 - 1/\sqrt{2}\hat{e}_2$, $\vec{v}_3 = \hat{e}_3$

   d) $\vec{v}_1 = \hat{e}_1$, $\vec{v}_2 = \hat{e}_2$, $\vec{v}_3 = 1/\sqrt{2}\hat{e}_3 + 1/\sqrt{2}\hat{e}_4$, $\vec{v}_4 = 1/\sqrt{2}\hat{e}_3 - 1/\sqrt{2}\hat{e}_4$

2. Suponga que los $\hat{g}_i$ son vectores normalizados pero no ortogonales. Para los siguientes vectores, escriba sus componentes covariantes.

   a) $\vec{A} = 4\hat{g}_1 + 8\hat{g}_2$ y $\vec{B} = -\hat{g}_1 + 3\hat{g}_2$

   b) $\vec{A} = -\hat{g}_1 + 2\hat{g}_2 + \hat{g}_3$ y $\vec{B} = \hat{g}_1 + \hat{g}_2 - 2\hat{g}_3$

   c) $\vec{A} = \hat{g}_1 + \hat{g}_2 + -2\hat{g}_3 + 2\hat{g}_4$ y $\vec{B} = 3\hat{g}_1 + 5\hat{g}_2 - \hat{g}_3 + 3\hat{g}_4$

3. Sean los vectores $\hat{g}_1 = -1/3\hat{e}_1 - 2/3\hat{e}_2 + 2/3\hat{e}_3$, $\hat{g}_2 = 1/\sqrt{2}\hat{e}_1 + 1/\sqrt{2}\hat{e}_2$ y $\hat{g}_3 = -1/\sqrt{3}\hat{e}_1 + 1/\sqrt{3}\hat{e}_2 + 1/\sqrt{3}\hat{e}_3$, los cuales definen un sistema de coordenadas no ortogonal y los vectores $\hat{e}_i$ son los vectores unitarios del sistema cartesiano clásico. Además, sean los vectores $\vec{A} = \hat{g}_1 + \hat{g}_2 + \hat{g}_3$ y $\vec{B} = -\hat{g}_1 + \hat{g}_2 + 2\hat{g}_3$.

   a) Calcular las componentes del tensor métrico M_{ij} en el sistema definido por los $\hat{e}_i$.

   b) Calcular las componentes del tensor métrico M_{ij} en el sistema definido por los $\hat{g}_i$.

   c) Obtener las componentes covariantes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en ambos sistemas.

   d) Calcular el producto punto entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$, en el sistema no ortogonal, utilizando la métrica y las componentes contravariantes de ambos vectores.

   e) Calcular el producto punto entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$, en el sistema no ortogonal, utilizando las componentes covariantes y contravariantes de ambos vectores.

   f) Comparar los resultados de los ejercicios 3*d* y 3*e*. ¿Se obtienen los mismos valores?

Transformaciones de componentes vectoriales contravariantes

4. El siguiente sistema de ecuaciones describe la transformación entre dos sistemas de coordenadas, dígase, del sistema no primado al sistema primado.

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + x_2 - x_3 \\ x'_2 &= -2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x'_3 &= 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

   a) Encontrar la matriz de transformación que va desde el sistema no primado al primado.

   b) Calcular la inversa y la traspuesta de la matriz de transformación. A partir de estos dos resultados, ¿qué relación existe entre los sistemas de coordenadas primado y no primado?

   c) Calcular la matriz de transformación que va desde el sistema primado al no primado.

5. Considere la base canónica del espacio de tres dimensiones. Utilizando las ecuaciones dadas en el ejercicio 4, exprese la base mencionada respecto al nuevo sistema de coordenadas. Realice el producto punto entre los vectores obtenidos e investigue si conservan su ortogonalidad.

Notación de Subíndices y Superíndices

6. Reescribir las siguientes expresiones de acuerdo a la convención establecida para representar componentes covariantes y contravariantes. Nota: Puede haber más de una manera correcta en algunos casos.

   a) $T_i S_i$

   b) $u_i v_i w_j \hat{e}_j$

   c) $T_{ij} v_i \hat{e}_j$

   d) $T_{ii} v_j \hat{e}_j$

   e) $T_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j$

   f) $T_{ijk} \hat{e}_i \hat{e}_j \hat{e}_k$

   g) $S_{ijk} T_{ls}$

   h) $T'_{ij} = a_{ir} a_{js} T_{rs}$

7. Para los siguientes vectores $\vec{v}$ expresados respecto a la base $\hat{g}$, calcular las componentes del tensor métrica y obtener las componentes covariantes v_i de cada vector. Los vectores $\hat{e}$ son los vectores unitarios del sistema cartesiano usual.

   a) $\{\hat{g}_1 = \hat{e}_1\, , \hat{g}_2 = \hat{e}_2\, , \hat{g}_3 = 1/\sqrt{3}\hat{e}_1 + 1/\sqrt{3}\hat{e}_2 + 1/\sqrt{3}\hat{e}_3\}\, , \{\vec{v}_1 = \hat{g}_1 - \hat{g}_3\, , \vec{v}_2 = \hat{g}_1 + 2\hat{g}_2\}$

   b) $\{\hat{g}_1 = 1/\sqrt{5}\hat{e}_1 + 2/\sqrt{5}\hat{e}_2\, , \hat{g}_2 = 2/\sqrt{5}\hat{e}_1 + 1/\sqrt{5}\hat{e}_2\, , \hat{g}_3 = -1/\sqrt{3}\hat{e}_1 - 1/\sqrt{3}\hat{e}_2 - 1/\sqrt{3}\hat{e}_3\}\, ,$ $\{\vec{v}_1 = -\hat{g}_1 - 2\hat{g}_2 + 2\hat{g}_3\, , \vec{v}_2 = \hat{g}_3\}$

   c) $\{\hat{g}_1 = 1/\sqrt{6}\hat{e}_1 - 1/\sqrt{6}\hat{e}_2 + 2/\sqrt{6}\hat{e}_3\, , \hat{g}_2 = \hat{e}_1\, , \hat{g}_3 = \hat{e}_3\}\, , \{\vec{v}_1 = 3\hat{g}_2 + 2\hat{g}_3\, , \vec{v}_2 = -\hat{g}_1 - \hat{g}_2\}$

Transformaciones de Componentes Vectoriales Covariantes

8. Considerar los vectores y la base dada en el ejercicio 7*a*. Además, considerar la siguiente matriz transformación

$$[t] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

   a) Transformar las componentes contravariantes de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ utilizando la matriz de transformación.
   b) Calcular las componentes covariantes de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.
   c) Transformar las componentes covariantes antes citadas. Para ello, encontrar la matriz de transformación apropiada para este caso.

9. Determinar si los siguientes vectores son covariantes o contravariantes. Las componentes de estos vectores se indican entre paréntesis. Indicación: analice la forma en que se transforman mediante la regla de la cadena.

   a) Velocidad (v_i)
   b) Momentum (p_i)
   c) Fuerza de Gravedad (F_i)
   d) Campo eléctrico (E_i)

10. Considerar las siguientes relaciones de transformación

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Considere las coordenadas contravariantes $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ y la métrica

$$[M] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Encuentre la matriz de la transformación t^i_j que realiza la transformación $x^i = t^i_j x^j$.
   b) Encuentre la matriz de la transformación desde el sistema primado al sistema no primado.
   c) Transforme el vector momentum $\vec{p}$ desde el sistema no primado al sistema primado. Para esto considere que $\vec{p}$ es la parte espacial del cuadrivector definido por sus componentes covariantes $p^0 = -E/c$, $p_1 = p_x$, $p_2 = p_y$, $p_3 = p_z$.
   d) Obtenga el producto escalar $p_\mu p^\mu$. Considere una partícula en reposo en el sistema no primado, y definamos $E_0 = m_0 c^2$ la energía de la partícula en reposo. ¿Qué puede concluir si considera que $p_\mu p^\mu$ es un escalar?

e) Transforme el vector fuerza $\vec{F}$ desde el sistema no primado al sistema primado. Asuma que la fuerza proviene de un campo conservativo.

Covarianza y Contravarianza en Tensores

11. Determinar si los siguientes tensores son covariantes, contravariantes o mixtos. Indicar cuántas veces el tensor es covariante y contravariante. Además, escribir la forma de transformación respectiva desde un sistema no primado a uno primado.

    a) T_{lmn}

    b) T^{opq}

    c) T^r_{st}

    d) T^i_j

    e) T^{ijk}_{lmn}

12. Demostrar que la delta de Kronecker δ_{ij} es un tensor

13. Demostrar que la métrica es un tensor, considerando que

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^i B^j M_{ij}$$

14. Sea $b_i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^h} a_h$. Demostrar que se cumple

$$a_h = \frac{\partial x^h}{\partial x'^i} b_i$$

15. Sea $b^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^h} \frac{\partial x'^j}{\partial x^k} a^{hk}$. Demostrar que se cumple

$$a^{hk} = \frac{\partial x^h}{\partial x'^i} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} b^{ij}$$