Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática I
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Dany López

Guía 8: Funciones Elementales

Jueves 17 Mayo 2012

Tarea: Prob. 22; 42, Entrega: Viernes 25 de Mayo.

---

* Esta es una guía con problemas adicionales. El resto de problemas para ejercitarse son los correspondientes al Capítulo 3 del libro de Churchill y Brown. Las referencias A & S se refieren al libro *Handbook of Mathematical functions* de Milton Abramowitz & Irene A. Stegun, Dover 1965.

1. Demuestre que

   a) $\{\arctan z\}' = \frac{1}{1+z^2}$

   b) $\{\arcsin z\}' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

2. Verificar que la solución general de las ecuaciones

$$\sin t = z, \quad \cos t = z \quad \text{y} \quad \tan t = z \tag{1}$$

   son respectivamente

$$t = \text{Arcsin}\, z = k\pi + (-)^k \,\text{arcsin}\, z \tag{2}$$
$$t = \text{Arccos}\, z = 2k\pi \pm \text{arccos}\, z \tag{3}$$
$$t = \text{Arctan}\, z = k\pi + \text{arctan}\, z \quad (z^2 \neq -1) \tag{4}$$

   en que k es un entero. Ver A&S **4.4.10-12**.

3. Verificar que para x real

$$\text{Arcsin}\, x = -iLn\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + ix\right],\ x^2 \leq 1 \tag{5}$$
$$\text{Arccos}\, x = -iLn\left[x + i(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right],\ x^2 \leq 1 \tag{6}$$
$$\text{Arctan}\, x = \frac{i}{2}Ln\frac{1-ix}{1+ix} = \frac{i}{2}Ln\frac{i+x}{i-x} \tag{7}$$

   Ver A&S **4.4.26-28**.

4. Verificar que para x real

$$\text{Arccsc}\, x = -iLn\left[\frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}} + i}{x}\right], x^2 \geq 1 \tag{8}$$
$$\text{Arcsec}\, x = -iLn\left[\frac{1 + i(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{x}\right], x^2 \geq 1 \tag{9}$$
$$\text{Arccot}\, x = \frac{i}{2}Ln\frac{ix+1}{ix-1} = \frac{i}{2}Ln\frac{x-i}{x+i} \tag{10}$$

   Ver A&S **4.4.29-31**.

5. Verificar que para x real

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcsinh} x &= \ln\left[x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right] && (11)\\
\operatorname{arccosh} x &= \ln\left[x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right], \qquad x \geq 1 && (12)\\
\operatorname{arctanh} x &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \qquad 0 \leq x^2 < 1 && (13)\\
\operatorname{arccsch} x &= \ln\left[\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{\frac{1}{2}}\right], \qquad x \neq 1 && (14)\\
\operatorname{arcsech} x &= \ln\left[\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}\right], \qquad 0 < x \leq 0 &&\\
\operatorname{arccoth} x &= \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, \qquad x^2 > 1 && (15)
\end{aligned}$$

Ver A&S **4.6.20-25**.

6. Para $z = re^{i\theta}$ escriba en la forma $u + iv$ la fracción

$$f(z) = \frac{a+z}{a-z}. \tag{16}$$

Verifique que u y v satisfacen la ecuación de Laplace en puntos $z \neq a$. Wunsch 3.1p28

7. Encuentre $f'(1+i)$ para $f(z)$ dada por e^{e^z}.

8. Estudie la analiticidad de $f(z) = \exp(z^*)$.

9. Demueste de dos maneras que

$$f(z) = e^{z^2} \tag{17}$$

es analítica. Calcule $f'(z)$ de tres maneras.

10. *a*) Calcule $\exp\frac{2+n\pi i}{4}$, para n par e impar. Considere los casos n positivo y negativo.

    b) Si $f(z) = e^z$, demuestre que para n entero $f(z + in\pi) = (-)^n f(z)$

11. Determine las soluciones de

    a) $e^z = 1 \mp \sqrt{3}i$

    b) $e^{iz} = 1 \pm \sqrt{3}i$

12. Demuestre que

    a) $|\exp(z^2| \leq \exp(|z|^2)$,

13. Demuestre que $\exp z^* = (\exp z)^*$ ¿Qué es $(\exp z)^{\text{conjugado N veces}}$?

14. ¿Qué condición(es) impone sobre z el hecho que $\exp(z^*) = (\exp z)^*$?

15. Qué condición(es) impone sobre sobre z y/o Rez y/o Imz el hecho que

    a) e^z sea real puro o imaginario puro.

    b) Repita para e^{iz}

16. Calcule las funciones hiperbólicas para $z_1 \pm z_2$. En particular, determine las fórmulas para el ángulo doble y la mitad del ángulo.

17. Demuestre que

    a) $\sinh^2 z_1 - \sinh^2 z_2 = \cosh^2 z_1 - \cosh^2 z_2$

    b) $\sinh^2 z_1 + \cosh^2 z_2 = \cosh^2 z_1 + \sinh^2 z_2$

18. Verificar que las funciones

    a) $-i \sinh iz, \qquad \cosh iz$

    b) $-i \tanh iz, \qquad i\text{csch}\, iz$

    c) $\text{sech}\, iz, \qquad i \coth iz,$

    son las correspondientes funciones no hiperbólicas de argumento z. **Nota**: Ver Abramowitz & Stegun **4.3.49-54**.

19. Demuestre que (Referencia a Abramowitz & Stegun)

    a) $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y,$ **(4.5.54)**

    b) $|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y,$ **(4.5.56)**

    c) $\tanh z = \frac{\sinh 2x + i \sin 2y}{\cosh 2x + \cos 2y},$ **(4.5.51)**

    d) $\coth z = \frac{\sinh 2x - i \sin 2y}{\cosh 2x - \cos 2y},$ **(4.5.52)**

    e) $\tan z = \frac{\sin 2x + i \sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y},$ **(4.3.57)**

    f) $\cot z = \frac{\sin 2x - i \sinh 2y}{\cosh 2y - \cos 2x},$ **(4.3.58)**

    g) $\arg \sin z = \arctan(\cot x \tanh y),$ **(4.3.60)**

    h) $\arg \cos z = -\arctan(\tan x \tanh y),$ **(4.3.62)**

20. Resuelva

    a) $\tan z = i, \qquad \tan z = \frac{3i}{5},$

    b) $\cos z = 4, \qquad \sin z + \cos z = i\sqrt{2}$

21. Escriba $z = \cos(\frac{\pi}{3} + i\theta)$ en la forma $x + iy$. ¿Cuál es la forma polar de z?

22. Verifique que

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sinh \theta + i \cosh \theta) = \sinh(\theta + i\frac{\pi}{4}). \tag{18}$$

23. Verifique que $i^i = e^{i \ln i} = e^{-\frac{\pi}{2}} e^{2n\pi}$ (¡ !). Calcule $(2i)^{2i}$.

24. Para qué valores de z es válida la ecuación

$$\text{Log}\, z = (\text{Log}\, z^*)^* \tag{19}$$

25. Determine la solución de

    a) $\text{Log}\, z = 1 + i$

b) $(\text{Log } z)^2 + \text{Log } z = -1$

26. Determine usando logaritmo todos los valores de

    a) $e^z =^{iz}$

    b) $(e^z - 1)^2 = e^{2z}$

27. Calcule $Re\left[\log\left(re^{i\theta} - 1\right)\right]$

28. Considere la identidad

$$\log z_1 + \log z_2 = \log(z_1 z_2). \tag{20}$$

    Si $z_1 = -ie$ y $z_2 = -2$, determine los valores específicos de $\log z_1$, $\log z_2$ y $\log(z_1 z_2)$ que satisfacen la identidad de Ec (20).

29. Paradoja

    Considere el error en el siguiente razonamiento:

$$1^2 = (-1)^2 \Rightarrow \log(1)^2 = \log(-1)^2 \tag{21}$$

    Se sigue entonces que $2\log 1 = 2\log(-1)$ y, en definitiva $\log 1 = \log(-1)$. Por otra parte, debido a que un posible valor de $\log 1$ es cero, concluimos que $\log(-1) = 0$.

30. Importancia de la función logaritmo

    Constate con diferentes ejemplos que si $z \neq 0$ entonces, $z^c = e^{c \log z}$ tiene un conjunto infinito de valores excepto si c es un número racional.

    Tenga presente que si c no es un entero $f(z) = z^c$ es multivaluada, entonces $f(z)$ posee varias ramas. La rama principal, por ejemplo, se obtiene considerando la rama principal de $\log z$. Por lo tanto esa rama de $f(z)$ es analítica en el mismo dominio que lo es $\text{Log } z$.

31. Sea $f_1(z) = z^z$ y $f_2(z) = z^{\text{sen } z}$, cada una definida en su rama principal. Calcule $f'(i)$.

32. Calcule todos los valores de

    a) $(1-i)^{1+i}$, $\quad (1+i)^{1-i}$, $\quad 1^i$, $\quad 2^{\sqrt{2}}$, $\quad i^{e^i}$

    b) $(1 + i\tan 2)^i$, $\quad \pi^e$, $\quad (1+i)^{e+i\pi}$, $\quad \left(e^{\pi^2}\right)^i$

33. Explique por qué los valores de $\sinh^{-1}(x)$ que entregan las tablas y calculadoras de sobremesa son iguales a los que se obtienen mediante la expresión $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Para razonar desde el plano complejo al eje real ponga atención a las ramas que se usan en las funciones correspondientes. (Wunsch 3.7p14)

34. Considere la función multivaluada (Wunsch 3.8, Ej.3)

$$f(z) = \sqrt{z^2 - z} = \sqrt{z}\sqrt{z-1} \tag{22}$$

    a) Determine los dos puntos sospechosos de ser puntos de ramificación. Verifique si sus sospechas son fundadas; para ello estudie qué ocurre con $f(z)$ al circundar cada uno de los puntos sospechosos.

    b) ¿Qué ocurre con $f(z)$ si circunda ambos puntos a través de un contorno arbitrario?

c) Describa algunos posibles cortes de rama que le permitan definir un dominio de analiticidad.

35. Repita el planteamiento del problema anterior para la funciones multivaluadas:

$$f_1(z) = \sqrt{z^2-1} = \sqrt{z-1}\sqrt{z+1}, \quad \text{y} \tag{23}$$

$$f_2(z) = \sqrt{z^2+1} = \sqrt{z-i}\sqrt{z+i} \tag{24}$$

36. Una rama de $f(z) = \sqrt{z}$ está definida por medio del corte $x = 0, y \leq 0$. Si en esa rama $f(z)$ toma el valor -2 en $z = 4$, determine el valor de $f(z)$ y $f'(z)$ en los puntos:

   a) $16 \qquad -16 \qquad 16i \qquad -16i$

   b) $1+i \qquad 1-i \qquad 4-4\sqrt{3}i.$

37. Para $f(z) = (z-1)^{1/3}$ un corte de rama puede ser la línea $y = 0, x \geq 1$. Si se selecciona una rama tal que $f(z)$ es un número real negativo cuando $y = 0, x < 1$.

   a) ¿Qué valor toma $f(z)$ es esa rama cuando $z = 1+i$?

   b) Calcule $f'(z)$ en tal punto.

38. Una rama de $f(z) = (z-1)^{2/3}$ está definida por medio del corte $x = 1, y \leq 0$. En esta rama $f(z)$ toma el valor 1 en $z = 0$. Determine el valor de $f(z)$ y $f'(z)$ en los puntos:

$$1+8i, \qquad -1, \qquad -i, \qquad (1-i)/2$$

39. Una rama de $f(z) = (z^2-1)^{1/2}$ está definida por medio de un corte que consiste en el segmento $|x| \leq 1, y = 0$. (Wunsch 3.8p9)

   a) Verifique que esta función tiene puntos de ramificación en $z = \mp 1$.

   b) Estudie si al cincundar esos puntos de ramificación moviéndose alrededor de la elipse $x^2 + 2y^2 = 2$ se pasa o no se pasa a otra rama de la función. Comente.

40. Determine todas la soluciones en el plano complejo de la ecuación $i^z + i^{-z} = 0_c$.

41. Considere la rama de $f(z) = \sqrt{z}$ definida por el corte $y = 0, x \leq 0$. Si para esta rama $\sqrt{1} = -1$, establezca si alguna de las siguientes ecuaciones tienen solución en el dominio de analiticidad de la rama.

   a) $\sqrt{z} - 3 = 0, \qquad \sqrt{z} + 3 = 0$

   b) $\sqrt{z} + 1 + i\sqrt{3} = 0, \qquad \sqrt{z} + 1 + i\sqrt{3} = 0$

42. Determine parte real y parte imaginaria de $f(z) = Log(z-1)$. ¿En qué dominio $\mathrm{Re}f(z)$ y/o $\mathrm{Im}f(z)$ satisface(n) la Ec de Laplace? Fundamente su respuesta.

43. Verificar que si $z \neq 0$ y α es un real, entonces

$$|z^\alpha| = e^{\alpha \ln |z|} = |z|^\alpha \tag{25}$$