Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Mecánica Cuántica I
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Felipe González C.

Guía 1b

Jueves 24 de Marzo de 2011

Introducción Matemática

1. Considere la siguiente matriz

$$\check{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Demuestre que $\check{\mathbf{M}} \neq \check{\mathbf{M}}^\dagger$ y que sólo el vector proporcional a $\binom{1}{0}$ es autovector de $\check{\mathbf{M}}$

2. Busque los autovalores y los autovectores de la siguiente matriz:

$$\check{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Construya el correspondiente operador de proyección, y verifique el teorema espectral para esta matriz.

3. Encuentre los autovalores, los autovectores ortonormales y la matriz de cambio de base $\check{\mathbf{U}}$ para la siguiente matriz:

$$\check{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} & \mathrm{i}\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i}\sqrt{2} & -\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Considere las matrices

$$\check{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix}, \qquad \check{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2i & 0 \\ i & 0 & -5i \end{pmatrix}$$

a) ¿Son $\check{\mathbf{A}}$ y $\check{\mathbf{B}}$ autohermíticas? Calcule $\check{\mathbf{A}}\check{\mathbf{B}}$ y $\check{\mathbf{B}}\check{\mathbf{A}}$ y verifique que $\mathrm{Tr}(\check{\mathbf{A}}\check{\mathbf{B}}) = \mathrm{Tr}(\check{\mathbf{B}}\check{\mathbf{A}})$; entonces calcule $[\check{\mathbf{A}},\check{\mathbf{B}}]$ y verifique que $\mathrm{Tr}([\check{\mathbf{A}},\check{\mathbf{B}}])=0$.

b) Encuentre los autovalores y los autovectores normalizados de $\check{\mathbf{A}}$. Verifique que la suma de los autovalores de $\check{\mathbf{A}}$ es igual al valor de $\mathrm{Tr}(\check{\mathbf{A}})$ calculada previamente ya que los 3 autovectores forman una base.

c) Verifique que $\check{\mathbf{U}}^\dagger\check{\mathbf{A}}\check{\mathbf{U}}$ es diagonal y que $\check{\mathbf{U}}^\dagger = \check{\mathbf{U}}$, donde $\check{\mathbf{U}}$ es la matriz formada por los autovectores normalizados de $\check{\mathbf{A}}$.

d) Calcule la inversa de $\check{\mathbf{A}}^\wr = \check{\mathbf{U}}^\dagger\check{\mathbf{A}}\check{\mathbf{U}}$ y verifique que $\check{\mathbf{A}^\wr}^{-1}$ es una matriz diagonal, cuyos autovalores son los inversos de los autovalores del operador $\check{\mathbf{A}}^\wr$.

5. Muestre que el simetrizador $\check{\mathbf{S}}$, definido sobre una función arbitraria $\phi(x)$ como $S\phi(x) = \frac{1}{2}[\phi(x) + \phi(-x)]$, y el antisimetrizador $\check{\mathbf{A}}$, definido como $A\phi(x) = \frac{1}{2}[\phi(x) - \phi(-x)]$ son operadores de proyección.

6. Utilizando la definición de una función de un operador, $f(\check{\mathbf{A}}) = \sum_i f(a_i)|a_i\rangle\langle a_i|$, con $\check{\mathbf{A}}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$ y $\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$, pruebe que la función potencia $f_n \equiv (\check{\mathbf{A}})^n$ satisface la relación $(\check{\mathbf{A}}^n)(\check{\mathbf{A}}^m) = \check{\mathbf{A}}^{n+m}$.

7. a) Pruebe la desigualdad de Schwartz y la desigualdad triangular utilizando los axiomas que definen el producto interno.

   b) Encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que esta desigualdad se transforme en igualdad.

8. a) Sea $\{\{\phi_k\}_{k\in I}\}$ un conjunto discreto de vectores ortonormales. Demuestre que para todo vector arbitrario $|\psi\rangle$ arbitrario se satisface la desigualdad de Bessel:

$$||\psi||^2 \geq \sum_k |\langle\phi_k|\psi\rangle|^2$$

   ¿En que caso se verifica la igualdad?

   b) Demuestre que el conjunto $\{\phi_k(t) = T^{-1/2}e^{2\pi ikt/T}\}_{k\in Z}$ es un conjunto ortonormal completo en $L^2[0, T]$

9. Pruebe que $\check{\mathbf{A}} = \check{\mathbf{B}}$, en el caso que $\langle\phi_1|\check{\mathbf{A}}|\phi_2\rangle = \langle\phi_1|\check{\mathbf{B}}|\phi_2\rangle$ para todo $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$.

10. Sean $\check{\mathbf{A}}$ y $\check{\mathbf{B}}$ dos matrices cuadradas. Suponiendo que $\check{\mathbf{B}}^{-1}$ existe, demuestre que

$$[\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}^{-1}] = -\check{\mathbf{B}}^{-1}[\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}]\check{\mathbf{B}}^{-1}.$$

11. Demuestre que si $\check{\mathbf{A}} = \check{\mathbf{A}}^\dagger$ y $\check{\mathbf{B}} = \check{\mathbf{B}}^\dagger$, entonces los siguientes son operadores autohermíticos:

   a) $\check{\mathbf{A}}^n, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

   b) $\check{\mathbf{C}} \equiv -\frac{1}{2}i[\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}] = -\frac{1}{2}i(\check{\mathbf{A}}\check{\mathbf{B}} - \check{\mathbf{B}}\check{\mathbf{A}})$.

   c) $\Gamma \equiv \frac{1}{2}\{\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}\}_+ = \frac{1}{2}(\check{\mathbf{A}}\check{\mathbf{B}} + \check{\mathbf{B}}\check{\mathbf{A}})$.

12. Sea $\check{\mathbf{H}}$ un operador autohermítico definido positivo, es decir:

$$\langle u|\check{\mathbf{H}}|u\rangle \geq 0, \qquad \forall|u\rangle.$$

   Demostrar que cualesquiera que sean $|u\rangle$ y $|v\rangle$ se verifica que

$$|\langle u|\check{\mathbf{H}}|v\rangle|^2 \geq \langle u|\check{\mathbf{H}}|u\rangle\langle v|\check{\mathbf{H}}|v\rangle,$$

   y que la igualdad $\langle u|\check{\mathbf{H}}|u\rangle = 0$ implica necesariamente que $\check{\mathbf{H}}|u\rangle = 0$. Demostrar, por otra parte, que $\mathrm{Tr}(\check{\mathbf{H}}) \geq 0$ y que la igualdad no se cumple más que si $\check{\mathbf{H}} = \check{\mathbf{0}}$

13. Sean $\check{\mathbf{A}}$ y $\check{\mathbf{B}}$ dos operadores hermíticos que satisfacen la relación de conmutación

$$[\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}] = i\check{\mathbf{C}}\ ,$$

   donde $\check{\mathbf{C}}$ también es un operador autoadjunto. Sea $|\psi\rangle$ un estado arbitrario; definimos los operadores $\check{\mathbf{A}}' = \check{\mathbf{A}} - \langle\check{\mathbf{A}}\rangle_\psi$ y $\check{\mathbf{B}}' = \check{\mathbf{B}} - \langle\check{\mathbf{B}}\rangle_\psi$, donde $\langle\check{\mathbf{O}}\rangle_\psi = \langle\psi|\check{\mathbf{O}}|\psi\rangle$.
   Considere la función del parámetro real α, $I(\alpha) = \langle\Phi|\Phi\rangle$, con $|\Phi\rangle = (\alpha\check{\mathbf{A}}' - i\check{\mathbf{B}}')|\psi\rangle$.

   a) Demuestre que

$$I(\alpha) = \langle\check{\mathbf{A}}'\rangle^2 \left\{\alpha + \frac{\langle\check{\mathbf{C}}\rangle}{2\langle\check{\mathbf{A}}'\rangle^2}\right\}^2 + \langle\check{\mathbf{B}}'\rangle^2 - \frac{\langle\check{\mathbf{C}}\rangle^2}{4\langle\check{\mathbf{A}}'\rangle^2}, \qquad \forall\, \mathcal{R}.$$

   Use esto para "redescubrir" la relación de incertidumbre de Heisenberg:

$$\langle\check{\mathbf{A}}'^2\rangle\langle\check{\mathbf{B}}'^2\rangle \geq \frac{\langle\check{\mathbf{C}}\rangle^2}{4}\ .$$

14. Sea $\check{\mathbf{A}}$ un operador en un espacio de Hilbert. Se define:

$$\exp(\check{\mathbf{A}}) = \sum_{k\geq 0} \check{\mathbf{A}}^k/k!, \text{ con } \check{\mathbf{A}}^0 \equiv \check{\mathbf{I}}$$

Demuestre que:

a) $\exp(\check{\mathbf{S}}\check{\mathbf{A}}\check{\mathbf{S}}^{-1}) = \check{\mathbf{S}}e^{\check{\mathbf{A}}}\check{\mathbf{S}}^{-1}$

b) si $\check{\mathbf{A}}$ es diagonalizable, $\det(e^{\check{\mathbf{A}}}) = \exp(\mathrm{tr}\check{\mathbf{A}})$

c) $e^{\check{\mathbf{A}}}\check{\mathbf{B}}e^{-\check{\mathbf{A}}} = \sum_{k\geq 0} \check{\mathbf{A}}^k\{\check{\mathbf{B}}\}/k!$, en que $\check{\mathbf{A}}^0\{\check{\mathbf{B}}\} \equiv \check{\mathbf{B}}$ y $\check{\mathbf{A}}^k\{\check{\mathbf{B}}\} = [\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{A}}^{k-1}\{\check{\mathbf{B}}\}]$

d) si $[\check{\mathbf{A}}, [\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}]] = [[\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}], \check{\mathbf{B}}] = 0$ entonces $\exp(\check{\mathbf{A}})\exp(\check{\mathbf{B}}) = \exp(\check{\mathbf{A}} + \check{\mathbf{B}} + [\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{B}}]/2)$

15. Considere un sistema cuyo Hamiltoniano esta dado por $\check{\mathbf{H}} = \alpha(|\psi_1\rangle\langle\psi_2| + |\psi_2\rangle\langle\psi_1|)$, donde α es un número real que tiene dimensiones de energía y $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ son vectores ortonormales.

a) ¿Es $\check{\mathbf{H}}$ un operador de proyección?, ¿que puede decir de $\alpha^{-2}\check{\mathbf{H}}^2$?

b) Muestre que $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ no son autoestados de $\check{\mathbf{H}}$.

c) Calcule los conmutadores $[\check{\mathbf{H}},|\psi_1\rangle\langle\psi_2|]$ y $[\check{\mathbf{H}},|\psi_2\rangle\langle\psi_2|]$, y encuentre la relación entre ellos.

d) Encuentre los autoestados normalizados de $\check{\mathbf{H}}$ y su correspondiente autovalor de la energía.

e) Suponiendo que $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ forman una base ortonormal completa, encuentre la matriz que representa a $\check{\mathbf{H}}$ en la base. Encuentre los autovalores y autovectores de la matriz y compare los resultados con aquellos deducidos previamente.

16. Considere un sistema físico cuyo espacio de estados está generado por tres kets $|u_1\rangle$,$|u_2\rangle$, $|u_3\rangle$. En esta base, tomadas en ese orden, los dos operadores $\check{\mathbf{H}}$ y $\check{\mathbf{B}}$ estan definidos por:

$$\check{\mathbf{H}} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \check{\mathbf{B}} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Muestre explícitamente que $\check{\mathbf{H}}$ y $\check{\mathbf{B}}$ conmutan

b) Encuentre una base ortonormal de autovectores comunes a $\check{\mathbf{H}}$ y $\check{\mathbf{B}}$ y exprésela como kets rotulados por sus autovalores.

c) De los siguientes conjuntos de operadores, ¿cuales forman un conjunto completo de observables que conmutan? $\{\check{\mathbf{H}}\}$, $\{\check{\mathbf{B}}\}$, $\{\check{\mathbf{H}}, \check{\mathbf{B}}\}$, $\{\check{\mathbf{H}}^2, \check{\mathbf{B}}\}$.

17. Considere el espacio vectorial formado por todas las posibles combinaciones lineales de las siguientes funciones:

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ (\sin x)^2,\ (\cos x)^2,\ \sin(2x) \text{ y } \cos(2x).$$

¿Cuál es la dimensión de este espacio? Proponga un conjunto de vectores base, y demuestre que este conjunto es completo.

18. Si $\check{\mathbf{A}}$ y $\check{\mathbf{B}}$ conmutan, y $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ son dos autovectores de $\check{\mathbf{A}}$ con diferentes autovalores, muestre que

a) $\langle\psi_1|\check{\mathbf{B}}|\psi_2\rangle$ es cero.

b) $\check{\mathbf{B}}|\psi_1\rangle$ es también un autovector de $\check{\mathbf{A}}$ con el mismo autovalor.