Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Mecánica Cuántica I
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Felipe González C.

Guía 3a

Jueves 28 de Abril de 2011

Tarea: Problemas **4, 14**
Entrega: Martes 10 de Mayo de 2011

Problemas unidimensionales

1. Una partícula que se mueve en una dimensión encuentra en un estado estacionario cuya función de onda es:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ A(1+\cos(\frac{\pi x}{a})) & -a \leqslant x \leqslant a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

donde A y a son constantes reales.

   a) ¿Es esta función de onda físicamente aceptable? Explique.
   b) Encuentre A de tal modo que $\psi(x)$ esté normalizado.
   c) Calcule Δx y Δp. Verifique que $\Delta x \Delta p \geqslant \hbar/2$
   d) Encuentre la región clásicamente permitida

2. Considere una partícula de masa m moviéndose libremente entre $x = 0$ y $x = a$, con un potencial infinito desde esos puntos al resto del espacio.

   a) Calcule los valores esperados $\langle \check{\mathbf{x}} \rangle_n$,$\langle \check{\mathbf{p}} \rangle_n$, $\langle \check{\mathbf{x}}^2 \rangle_n$ y $\langle \check{\mathbf{p}}^2 \rangle_n$, donde n se refiere al estado $|\psi_n\rangle$, y compare con sus contrapartes clásicas.
   b) Calcule el producto de las incertezas $\Delta\check{\mathbf{x}}\Delta\check{\mathbf{p}}$ para cada autoestado.
   c) Use los resultados de b) para estimar el punto cero de energía.

3. Un electrón se mueve libremente dentro de una caja con paredes infinitas en $x = 0$ y $x = a$, en una dimensión. Si el electrón está inicialmente en el estado base ($n = 1$) de la caja y repentinamente se cuadruplica el tamaño de la caja (la parte derecha del muro se mueve instantáneamente desde $x = a$ a $x = 4a$), calcule la probabilidad de encontrar el electrón

   a) en el estado base en la nueva caja.
   b) en el primer estado excitado de la nueva caja.

4. Considere una caja potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & \text{para el resto} \end{cases}$$

   a) Estimar la energía del estado base en el primer y segundo estado excitado para
      1) Un electrón encerrado en una caja de tamaño 10^{-10} m (exprese su respuesta en eV, usando los valores de: $\hbar c = 200$ MeV fm, $m_e c^2 = 0{,}5$ MeV).
      2) Una esfera metálica de 1 g que se mueve en una caja de tamaño $a = 10$ cm. Exprese su respuesta en Joules.
   b) Discuta la importancia del efecto cuántico de los dos sistemas.

c) Use el principio de incertidumbre para estimar la velocidad del electrón y la esfera metálica.

5. Un electron está confinado en un caja de potencial de paredes infinitas, cuyo ancho es 3×10^{-10} m. Calcule:

   a) los tres primeros niveles de energía permitida del electrón;

   b) la longitud de la onda electromagnética que podría excitar al electrón del primer al tercer nivel;

   c) todas las posibles longitudes de onda de la radiación emitida al desexcitarse el electrón.

6. Utilizando el principio de incerteza, muestre que la energía más baja de un oscilador armónico es $\hbar\omega/2$.

7. Considere la ecuación de Schrödinger unidimensional e independiente del tiempo para un potencial arbitrario $V(x)$. Pruebe que si una solución $\psi(x)$ tiene la propiedad que $\psi(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$, etonces la solución debe ser no degenerada y por lo tanto real, aparte de un posible factor de fase. Indicación: Muestre que una suposición contraria lo llevaría a una contradicción.

8. Una partícula de masa m se mueve en una caja unidimensional de largo l con el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 \leqslant x \leqslant l \\ \infty & x > l \end{cases}$$

   En un cierto instante $t = 0$ la función de onda de esta partí cula es conocida y tiene la forma:

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{30}{l^5}}x(x-l) & 0 < x < l \\ 0 & \text{otros casos} \end{cases}$$

   Escriba una expresión para $\psi(x, t > 0)$ como una serie y dé las expresiones para los coeficientes.

9. Un cuerpo rígido con un momento de inercia I_z rota libremente en el plano $x - y$. Llamemos ϕ al ángulo entre el eje x y el eje de rotación.

   a) Encuentre los autovalores de energía y las correspondientes autofunciones.

   b) Al tiempo $t = 0$ la rotación es descrita por un paquete de ondas $\psi(0) = A\sin^2(\phi)$. Encuentre $\psi(\phi, t)$ para $t > 0$.

10. Un electrón en su estado basal (*ground state*) está confinado en una caja unidimensional de ancho $10^{-10}m$. Su energía es 38 eV. Calcule

    a) La energía del electrón en su primer estado excitado.

    b) El promedio de la fuerza en las paredes de la caja cuando el electrón está en el estado basal.

11. Encuentre la energía de los niveles $E_n^{(a)}$ en el potencial unidimensional en la figura izquierda, así como los niveles de energía $E_n^{(b)}$ de la figura a la derecha.

Figura 1: Pozos de profundidad V_0. A la izquierda, con ancho $2a$. A la derecha, con ancho a y unido a una barrera de potencial infinito.

12. Considere la función de onda unidimensional

$$\psi(x) = A \left(\frac{x}{x_o} \right)^n e^{-x/x_o}$$

donde A, n y x_o son constantes.

a) Usando la ecuación de Schrödinger encuentre el potencial $V(x)$ y la energía E para la cual esta función de onda es una autofunción (Suponga que cuando $x \to \infty\, V(x) \to 0$)

b) ¿Qué conexión ve Ud. entre el potencial y el potencial radial efectivo para un estado orbital hidrogenoide de momento angular l?

13. Considere el siguiente potencial unidimensional:

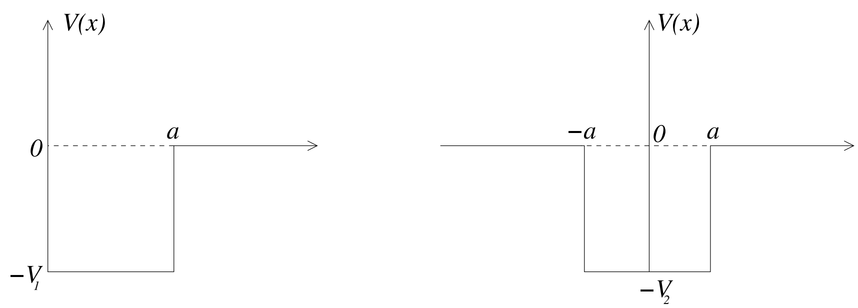

Figura 2: A la izquierda, pozo de ancho a y profundidad V_1, unido a una barrera de potencial infinito. A la derecha, pozo simétrico de ancho $2a$ y profundidad V_2.

a) ¿Puede cada uno soportar un estado ligado para una profundidad $V_i (i = 1, 2)$ arbitrariamente pequeña? Explique cualitativamente.

b) Para $V_1 = V_2$, ¿cual es la relación entre las energías de los dos estados ligados?

c) Para estados contínuos de una energía dada ¿Cuántas soluciones independientes se pueden tener?

14. Se tiene un neutrón en una caja unidimensional, con barreras impenetrables en $x = 0$ y $x = L$.

    a) Encuentre los autovalores y autofunciones para esta partícula.
    Suponga que para $t = 0$ el estado del neutron es:

    $$\psi(x, 0) = Ax(x - L)\ .$$

    b) Normalice ψ y busque el valor de la constante A.

    c) ¿Cual es la probabilidad de encontrar la partícula en el intervalo $(0, L/2)$ en $t = 0$?

    d) ¿Cual es la probabilidad de que la partícula tenga una energía E_5 en $t = 0$?

    e) Calcule $\langle E \rangle$ en $t = 0$.

15. Encuentre los tiempos de dispersión para un átomo localizado dentro de una región del tamaño de 1 [Å].

16. Considere un electrón en una caja de unidmensional con barreras impenetrables en $x = -L/2$ y $x = L/2$.

    a) Encuentre los autovectores $|\phi_n\rangle$ y autovalores E_n para esta partícula.
    Para $t = 0$ el estado del electrón es:

    $$\psi(x, 0) = a_1|\phi_1\rangle + a_2|\phi_2\rangle + a_3|\phi_3\rangle + a_4|\phi_4\rangle\ .$$

    b) ¿Si se mide la energía la tiempo $t = 0$, ¿cuál es la probabilidad de encontrar un valor menor que $3\pi^2\hbar^2/mL^2$?

    c) ¿Cuál es el valor medio y la varianza de la energía del electrón en $t = 0$?

    d) Calcule el vector de estado al instante t. Los resultados encontrados en en *a*) y *b*), ¿permanecen válidos para un tiempo t arbitrario?

    e) Cuando se mide la energía, se encuentra el resultado $8\pi^2\hbar^2/mL^2$. Después de la medición, ¿cuál es el estado del sistema? ¿qué resulta si se mide la energía de nuevo?