Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Mecánica Cuántica I
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Felipe González C.

Guía 5a

Viernes 29 de Julio de 2011

Momento Angular

1. Muestre que $\Delta\check{\mathbf{J}}_x\Delta\check{\mathbf{J}}_y = \hbar[j(j+1) - m^2]$, donde $\Delta\check{\mathbf{J}}_x = \sqrt{\langle\check{\mathbf{J}}_x^2\rangle - \langle\check{\mathbf{J}}_x\rangle^2}$ (y lo mismo para para $\Delta\check{\mathbf{J}}_y$).
   a) Calcule $[\check{\mathbf{J}}_x^2, \check{\mathbf{J}}_y]$, $[\check{\mathbf{J}}_z^2, \check{\mathbf{J}}_y]$ y $[\check{\mathbf{J}}^2, \check{\mathbf{J}}_y]$
   b) Muestre que $\langle j,m|\check{\mathbf{J}}_x^2|jm\rangle = \langle j,m|\check{\mathbf{J}}_y^2|j,m\rangle$.

2. **Representación matricial de un operador de momentum angular.** Considere un operador vectorial llamado *espin*, $\vec{\check{\mathbf{S}}}$, que se comporta de la misma forma que los operadores generales de momentum angular, $\vec{\check{\mathbf{J}}}$, discutidos en clase, pero con el valor de $j = 1/2$.
   a) Encuentre las matrices que representan a los operadores $\check{\mathbf{S}}^2, \check{\mathbf{S}}_z, \check{\mathbf{S}}_\pm, \check{\mathbf{S}}_x$ y $\check{\mathbf{S}}_y$
   b) Encuentre los autoestados de $\check{\mathbf{S}}^2$ y $\check{\mathbf{S}}_z$ y verifique que forman una base ortonormal y completa.
   c) Use las matrices que representan a $\check{\mathbf{S}}_x, \check{\mathbf{S}}_y$ y $\check{\mathbf{S}}_z$ para calcular $[\check{\mathbf{S}}_x, \check{\mathbf{S}}_y]$, $[\check{\mathbf{S}}_y, \check{\mathbf{S}}_z]$ y $[\check{\mathbf{S}}_z, \check{\mathbf{S}}_x]$.
   d) Escriba los operadores $\check{\mathbf{S}}_i,\ i = x, y, z$ como $\check{\mathbf{S}}_i = (\hbar/2)\check{\boldsymbol{\sigma}}_i$ donde $\vec{\check{\boldsymbol{\sigma}}}_i$ son las así llamadas *matrices de Pauli*. Verifique que:
      1) las matrices de Pauli son hermíticas, tienen traza nula y determinante -1.
      2) las matrices de Pauli satisfacen $\{\check{\boldsymbol{\sigma}}_j, \check{\boldsymbol{\sigma}}_k\} = 2\check{\mathbf{I}}\delta_{ij}$, donde $\check{\mathbf{I}}$ es la matriz identidad de 2×2.
      3) las matrices de Pauli satisfacen $[\check{\boldsymbol{\sigma}}_j, \check{\boldsymbol{\sigma}}_k] = 2i\varepsilon_{jkl}\check{\boldsymbol{\sigma}}_l$.

3. Encuentre los niveles de energía de una particula de espin $s = 1/2$ cuyo Hamiltoniano está dado por
$$H = \frac{a}{\hbar^2}(\check{\mathbf{S}}_x^2 + \check{\mathbf{S}}_y^2 - 2\check{\mathbf{S}}_z^2) - \frac{b}{\hbar}\check{\mathbf{S}}_z$$
donde a y b son constantes reales.

4. Encuentre los niveles de energía de una particula de espin $s = 3/2$ cuyo Hamiltoniano está dado por
$$H = \frac{a}{\hbar^2}(\check{\mathbf{S}}_x^2 + \check{\mathbf{S}}_y^2 - 2\check{\mathbf{S}}_z^2) - \frac{b}{\hbar}\check{\mathbf{S}}_z$$
donde a y b son constantes reales.

5. Considere un sistema de momento angular $j = 1$, cuyo espacio de estados tiene como base a los vectores $|0\rangle, |1\rangle, |-1\rangle$, autovectores comunes a $\check{\mathbf{J}}^2$ (autovalor $2\hbar^2$) y $\check{\mathbf{J}}_z$ (autovalores $\hbar$, 0 y $-\hbar$, respectivamente). El estado del sistema es
$$|\psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle + \gamma|-1\rangle$$
donde α, β, γ son números complejos. Calcule los valores medios $\langle\check{\mathbf{J}}^2\rangle, \langle\check{\mathbf{J}}_x\rangle, \langle\check{\mathbf{J}}_y\rangle, \langle\check{\mathbf{J}}_z\rangle$.

6. Considere un sistema físico cuyo espacio de estados tiene como base los cuatro vectores propios $|j, m_z\rangle$ comunes a $\check{\mathbf{J}}^2$ y $\check{\mathbf{J}}_z$ ($j = 0, 1; -j \le m_z \le j$)

a) Si denotamos por $|j, m_x\rangle$ los vectores propios comunes a $\check{\mathbf{J}}^2$ y $\check{\mathbf{J}}_x$, escriba los vectores $|j, m_x\rangle$ en términos de los vectores $|j, m_z\rangle$.

b) Considere el sistema en el estado normalizado

$$|\psi\rangle = \alpha|j = 1, m_z = 1\rangle + \beta|j = 1, m_z = 0\rangle + \gamma|j = 0, m_z = 0\rangle.$$

1) ¿Cuál es la probabilidad de medir $2\hbar^2$ y $\hbar$ si $\check{\mathbf{J}}^2$ y $\check{\mathbf{J}}_z$ se miden simultáneamente?
2) Calcule el valor medio de $\check{\mathbf{J}}_z$ cuando el sistema se encuentra en el estado $|\psi\rangle$, y las probabilidades de los distintos resultados posibles de una medición de $\check{\mathbf{J}}_z$.
3) Responda las preguntas (i) y (ii) para los observables $\check{\mathbf{J}}^2$ y $\check{\mathbf{J}}_x$.
4) Se mide ahora $\check{\mathbf{J}}_z^2$. ¿Cuáles son los posibles resultados, sus probabilidades, y el valor medio?

7. Suponga que se permitiera $l = 1/2$ para momento angular orbital. De

$$\check{\mathbf{L}}_+ Y_{1/2,1/2}(\theta, \phi) = 0$$

obtenga $Y_{1/2,1/2}(\theta, \phi)$. Ahora trate de construir $Y_{1/2,-1/2}(\theta, \phi)$ de las siguientes dos maneras:(a) aplicando $\check{\mathbf{L}}_-$ a $Y_{1/2,1/2}$ (b) a partir de $\check{\mathbf{L}}_- Y_{1/2,-1/2} = 0$. Muestre que los dos procedimientos llevan a resultados contradictorios.

8. Considere un autoestado $|l = 2, m = 0\rangle$. Suponga que este estado se rota en un ángulo β en torno al eje y. Encuentre la probabilidad de que el nuevo estado sea encontrado en $m = 0, \pm 1$ y ± 2.

9. Suponga que un átomo esta representado por la siguiente función de onda

$$\psi(\vec{r}) = N f(r)\{-\cos\theta(\mathrm{e}^{i\phi}\sin\theta - i) + \frac{1}{4\sqrt{2}}(1+i)\mathrm{e}^{2i\phi}\sin^2\theta\}$$

donde N es una constante y $\int_0^\infty dr\, r^2|f(r)|^2 = 1$. Normalice ψ. Calcule la probabilidad de que al medir $(\check{\mathbf{L}}^2, \check{\mathbf{L}}_z)$ se obtengan los valores $(42\hbar^2, 2\hbar), (6\hbar^2, \hbar), (6\hbar^2, 0), (2\hbar^2, 0)$. ¿Cuál es la probabilidad de que al medir $\check{\mathbf{L}}^2$ se obtenga $6\hbar^2$?

10. Considere una partícula sin espín cuya función de onda esta dada por

$$\psi = N(x + y + z)\mathrm{e}^{-r^2/a}$$

donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y N y a son constantes reales.

a) ¿Cuál es el mometum angular total de la partícula?

b) ¿Cuál es el valor esperado de $\check{\mathbf{L}}_z$?

c) ¿Qué valores (y con que probabilidad) puede obtener al medir $\check{\mathbf{L}}_z$?

d) Si se mide $\check{\mathbf{L}}_z$ y $\check{\mathbf{L}}^2$, ¿cuál es la probabilidad de encontrar 0 y $2\hbar^2$?

11. Encuentre los niveles de energía de una partícula que se puede mover libremente en el espacio, excepto por la restricción de permanecer en la superficie de una esfera de radio r.

12. Encuentre los niveles de energía de una molécula diatómica.

13. Encuentre los autovalores y autovectores del operador de spin $\check{\vec{\mathbf{S}}}$ de un electrón en la dirección del vector unitario $\vec{n}$, asumiendo que este vector yace en el plano xz. Encuentre la probabilidad de obtener $\hbar/2$ al medir $\check{\mathbf{S}}_z$.

14. El Hamiltoniano de un sistema es $\check{\mathbf{H}} = \varepsilon\check{\vec{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \vec{n}$, donde ε es una constante con dimensiones de energía, $\vec{n}$ un vector unitario arbitrario y $\check{\vec{\boldsymbol{\sigma}}}$ el operador que contiene a las 3 matrices de Pauli. Encuentre los autovalores de energía y los autoestados normalizados de $\check{\mathbf{H}}$. Encuentre una matriz de transformación que diagonalice a $\check{\mathbf{H}}$.

15. Considere un sistema el cual está inicialmente en el estado

$$\psi(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{5}} Y_{1,-1}(\theta, \phi) + \sqrt{\frac{3}{5}} Y_{1,0}(\theta, \phi) + \frac{1}{\sqrt{5}} Y_{1,1}(\theta, \phi).$$

Encuentre $\langle \psi | \check{\mathbf{L}}_+ | \psi \rangle$, los posibles valores de una medición de $\check{\mathbf{L}}_z$ y con que probabilidades se obtendrían, y el producto $\Delta \check{\mathbf{L}}_x \Delta \check{\mathbf{L}}_y$ considerando que después de medir $\check{\mathbf{L}}_z$ se obtuvo $-\hbar$.

16. Considere una partícula con función de onda

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^2} + \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{xy}{r^2}.$$

   a) Calcule $\check{\mathbf{L}}^2 |\psi\rangle$, $\check{\mathbf{L}}_z |\psi\rangle$ y el momento angular total de la partícula.
   b) Calcule $\check{\mathbf{L}}_+ |\psi\rangle$ y $\langle \psi | \check{\mathbf{L}}_+ | \psi \rangle$.
   c) Si se llevan a cabo mediciones de la componente z del momento angular, encuentre cuales son las probabilidades de obtener 0, $\hbar$ y $-\hbar$.
   d) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar a la partícula en la posición $\theta = \pi/3$ y $\phi = \pi/2$ dentro de una incerteza $d\theta = 0{,}03$ y $d\phi = 0{,}03$ radianes?

17. Encuentre la representación matricial de los operadores $\check{\mathbf{S}}z$, $\check{\mathbf{S}}x$, $\check{\mathbf{S}}_y$, $\check{\mathbf{S}}_x^2$ y $\check{\mathbf{S}}_y^2$ en la base de $\check{\mathbf{S}}^2$ y S_z para una partícula de spin $s = 3/2$. Luego, encuentre los niveles de energía de esta partícula cuando está descrita por el Hamiltoniano

$$\check{\mathbf{H}} = \frac{\varepsilon_0}{\hbar^2} (\check{\mathbf{S}}_x^2 - S_y^2) - \frac{\varepsilon_0}{\hbar} \check{\mathbf{S}}_z.$$

Si el sistema está inicialmente en el estado $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el estado del sistema después de un tiempo t?

18. Considere la función $f(\theta, \phi) = 3 \sin\theta \cos\theta e^{i\phi} - 2(1 - \cos\theta) e^{2i\phi}$. ¿Es f un autoestado de $\check{\mathbf{L}}^2$ o $\check{\mathbf{L}}_z$?. Encuentre la probabilidad de medir $2\hbar$ para la componente z del momento angular.

19. Muestre que $[\check{\mathbf{L}}_-, e^{-i\phi} \sin\theta] = 0$ y $[\check{\mathbf{L}}_-, \cos\theta] = \hbar e^{-i\phi} \sin\theta$.

20. Una partícula de spin $s = \frac{1}{2}$ interactúa con un campo magnético $\vec{B} = B_0 \vec{\hat{z}}$ de tal manera que el Hamiltoniano es $\check{\mathbf{H}} = \mu \check{\vec{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \vec{B}$, donde μ es el momento magnético y $\check{\vec{\boldsymbol{\sigma}}}$ es el vector que contiene las 3 matrices de Pauli. En tiempo $t = 0$, una medición determina que el spin apunta en la dirección positiva del eje x. ¿Cuál es la probabilidad de que esté apuntando en la dirección negativa de y después de un tiempo t?