Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Mecánica Cuántica I
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Felipe González C.

Guía 6

Sábado 24 Septiembre de 2011 (retomando actividades...)

Potenciales centrales en 3-D y átomo de hidrógeno

1. Considere un electrón confinado al interior de un cascarón cilíndrico cuyo eje coincide con el eje z. Se pide que la función de onda sea cero en la pared interior y exterior, $\rho = \rho_a$ y $\rho = \rho_b$, y tambien en las de arriba y abajo, $z = 0$ y L.

   a) Encuentre las autofunciones de la energía. (No se preocupe de la normalización). Muestre que los autovalores de la energía están dados por

   $$E_{lmn} = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left[k_{mn}^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2\right] \ (l = 1, 2, 3 \ldots,\ m = 0, 1, 2, \ldots)$$

   donde k_{mn} es la raíz enésima de la ecuación trascendental

   $$J_m(k_{mn}\rho_b)N_m(k_{mn}\rho_a) - N_m(k_{mn}\rho_b)J_m(k_{mn}\rho_a) = 0$$

2. Considere sistemas en dos dimensiones. Encuentre los autovalores y las autofunciones para una partícula que se encuentra confinada en

   a) una caja cuadrada de lado a con paredes rígidas impenetrables. Escriba una tabla con los primeros 4 estados, indicando su energía y degeneración.

   b) una caja circular de radio r con paredes rígidas impenetrables. Escriba una tabla con los primeros 4 estados, indicando su energía y degeneración.

   c) Compare los niveles de energía de ambos sistemas suponiendo que tienen la misma área. ¿Como dependen de la forma de la caja? ¿Para cual caja la razón E_2/E_1 es menor? (E_1 y E_2 son el estado fundamental y el primer nivel excitado, respectivamente).

3. *a*) Encuentre los niveles de energía y las funciones de onda para el oscilador armónico isotrópico en dos dimensiones, $V(r) = m\omega^2 r^2/2$ (donde $r = x^2 + y^2$), resolviendo la ecuación de Schrödinger en coordenadas cartesianas. Escriba las autonfunciones para el estado fundamental y los primeros estados excitados.

   b) Escriba la ecuación de Schrödinger en coordenadas polares. Constuya explicitamente los primeros estados excitados con momento angular $-\hbar$ y $+\hbar$; estas funciones son combinación lineal de las funciones de onda encontradas en la parte a).

4. Encuentre los niveles de energía y las funciones de onda, para $l = 0$, para una partícula que se encuentra sometida al potencial

   $$V(x) = \begin{cases} 0 & a < r < b \\ \infty & \text{en el resto.} \end{cases}$$

5. En el tiempo $t = 0$ la función de onda del átomo de hidrógeno es

   $$\psi(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{10}}(2\psi_{100} + \psi_{210} + \sqrt{2}\psi_{211} + \sqrt{3}\psi_{21-1}).$$

   Ignore el espín y los efectos radiativos.

a) ¿Cuál es el valor esperado ("de expectación") de la energía de este sistema?

b) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar este sistema con $l = 1$ y $m = +1$ como función del tiempo?

c) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el electrón a una distancia no mayor que 10^{-10} cm del protón? Aproxime su resultado.

d) ¿Cómo evoluciona ésta función de onda en el tiempo? O sea, ¿que es $\psi(\mathbf{r}, t)$?

e) Suponga que cierta medida realizada muestra que $L = 1$ y $L_z = +1$. Describa la función de onda inmediatamente después de tal medida en términos de los ψ_{nlm} usada arriba.

6. Una partícula está confinada a una caja esférica de radio R. Hay una barrera en el centro de la caja, la cual excluye a la partícula de un radio a. De esta forma, la partícula está confinada a la región $a < r < R$. Suponga que la función de onda se anula en $r = a$ y $r = R$ y derive una expresión para los autovalores y autofunciones de estados con momento angular $\ell = 0$.

7. Una partícula se mueve en 3 dimensiones. El único potencial es una función delta atractiva en $r = a$ de la forma

$$V(r) = -\frac{\hbar^2}{2mD}\delta(r - a),$$

donde D es un parámetro que determina la fuerza del potencial.

a) ¿Cuáles son las condiciones de continuidad en $r = a$ para la función de onda y su derivada?

b) ¿Para qué valores de D existen estados ligados para ondas tipo s?