Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática II
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudante: Nicolás Amigo

Guía 10

Lunes 16 de enero 2012

Aplicaciones de Transformada de Laplace a Ecuaciones Diferenciales Lineales

1. Resuelva los siguientes problemas con valores iniciales

   a)
   $$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 5y(t) = -8e^{-t}$$
   con $y(0) = 2$ y $y'(0) = 12$.

   b)
   $$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} - 5y(t) = te^{t}$$
   con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$.

   c)
   $$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 5y(t) = -8e^{\pi-t}$$
   con $y(\pi) = 2$ y $y'(\pi) = 12$.

   d)
   $$\frac{d^2y}{dt^2} + 2t\frac{dy}{dt} - 4y(t) = 1$$
   con $y(0) = 0$ y $y'(0) = 0$.

2. Usar el teorema de convolución para resolver el siguiente problema con valores iniciales
   $$\frac{d^2y}{dt^2} - y(t) = g(t)$$
   con $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ y $g(t)$ es de orden exponencial y continua por partes en $[0, \infty)$

3. Utilizar el teorema de convolución para resolver la ecuación íntegro-diferencial
   $$\frac{dy}{dt} = 1 - \int_0^t y(t-v)e^{-2v}dv$$
   con $y(0) = 1$.

4. Considere una masa m oscilando bajo la influencia de un resorte ideal, de constante k. Despreciando la fricción, la ecuación que modela este problema es
   $$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx(t) = 0$$
   con $x(0) = x_0$ y $x'(0) = 0$. Encuentre $x(t)$.

5. Considere las siguientes ecuaciones de movimiento que describen la nutación de los polos de la tierra (ignorando las fuerzas de precesión)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ay(t) \\ \frac{dy}{dt} &= ax(t) \end{aligned}$$

donde $a = [(I_z - I_x)/I_z]w_z$, $x(t) = w_x$, $y(t) = w_y$ y I_z es el momento de inercia alrededor del eje z (análogo para I_x y I_y).
Las condiciones iniciales del problema están dadas por $x(0) = r_0$ y $y(0) = 0$. Encuentre $x(t)$ y $y(t)$.

6. Una masa unida a un resorte se libera desde el reposo, a un metro por debajo de la posición de equilibrio para el sistema masa-resorte y comienza a vibrar. Después de π segundos, la masa es golpeada por un martillo que ejerce un impulso sobre la masa. El sistema queda descrito por el problema simbólico con valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 3\delta(t-\pi)$$

con $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ y $x(t)$ denota el desplazamiento con respecto del equilibrio en el instante t. Determine $x(t)$.

7. La segunda ley de Newton entrega la siguiente ecuación para el sistema de una fuerza impulsiva actuando sobre una partícula de masa m

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P\delta(t)$$

donde P es una constante.
Las condiciones iniciales del problema están dadas por $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$. Encuentre $x(t)$.

8. Considere la siguiente ecuación para el sistema de una masa oscilando con amortiguamiento proporcional a la velocidad.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx(t) = 0$$

donde b es una constante, $x(0) = x_0$ y $x'(0) = 0$. Encuentre $x(t)$.

9. Considere la siguiente ecuación para el sistema de un oscilador amortiguado y forzado a la vez

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx(t) = F(t)$$

con $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$. Encuentre $x(t)$ para los siguientes casos de fuerza externa

   a) $F(t) = P\delta(t)$
   b) $F(t) = F_0 \sin wt$

El movimiento de un cuerpo cayendo en un medio resistivo puede ser descrito por

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - b\frac{dx}{dt}$$

cuando la fuerza resistiva es proporcional a la velocidad.
Las condiciones iniciales son $x(0) = x'(0) = 0$. Encuentre $x(t)$.

10. Sea q una carga puntual restringida a moverse en el plano $x - y$ bajo la acción de un campo magnético $\vec{B} = B_0\hat{k}$. Dado que la fuerza de Lorentz es $\vec{F} = \frac{q}{c}(\vec{v} \times \vec{B})$, determine la posición $\vec{r}(t)$ para las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \vec{v}(0) &= v_o\hat{\imath} \\ x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 + \mathrm{sgn}(q)r \end{aligned}$$

Aplicaciones de Transformada de Laplace a Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

11. La ecuación de onda electromagnética con $E = E_y$ o E_z, es decir una onda transversal propagándose a lo largo del eje x, es

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

con condiciones iniciales $E(x,0) = 0$, $E(0,t) = F(t)$, $\frac{\partial E}{\partial t}|_{t=0} = 0$ y con la onda permaneciendo finita en $x \to \infty$. Encuentre $E(x,t)$.

12. Un tubo semi-infinito de sección transversal constante inicialmente contiene agua pura. En un instante $t = 0$, un extremo del tubo es puesto en contacto con una solución salada y es mantenido (este extremo) a una concentración u_0. La ecuación que permite modelar este sistema es la ecuación de difusión (donde el sistema tiene constante de difusión k)

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Encuentre $u(x,t)$.

Aplicaciones de Transformada de Laplace a Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales

13. Resolver los siguientes problemas con valores iniciales

    a)

$$\begin{aligned} x'(t) &= 3x(t) - 2y(t) \\ y'(t) &= 3y(t) - 2x(t) \end{aligned}$$

    con $x(0) = 1$ y $y(0) = 1$.

b)

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) + \sin t \\ y'(t) &= x(t) + 2\cos t \end{aligned}$$

con $x(0) = 2$ y $y(0) = 0$.

c)

$$\begin{aligned} x'(t) - 2y(t) &= 2 \\ x'(t) + x(t) - y'(t) &= t^2 + 2t - 1 \end{aligned}$$

con $x(1) = 1$ y $y(1) = 0$.

d)

$$\begin{aligned} x'(t) - 2y(t) &= 4t \\ y'(t) + 2y(t) - 4x(t) &= -4t - 2 \end{aligned}$$

con $x(0) = 4$ y $y(0) = -5$.

e)

$$\begin{aligned} x''(t) + 2y'(t) &= -x(t) \\ -3x''(t) + 2y''(t) &= 3x(t) - 4y(t) \end{aligned}$$

con $x'(0) = -7$, $y(0) = 4$ y $y'(0) = -9$.

f)

$$\begin{aligned} x'(t) + x(t) - y'(t) &= 2(t-2)e^{t-2} \\ x''(t) - x'(t) - 2y(t) &= -e^{t-2} \end{aligned}$$

con $x(2) = 0$, $x'(2) = 1$ y $y(2) = 1$.