Departamento de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

Métodos de la Física Matemática II
Profesor: Gonzalo Gutiérrez
Ayudantes: Nicolás Amigo

Guía 1

Jueves 17 de Noviembre 2011

Sucesiones de Funciones

1. *a*) Pruebe la desigualdad de Schwartz y la desigualdad triangular utilizando los axiomas que definen el producto interno.

   b) Encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que esta desigualdad se transforme en igualdad.

2. Muestre que la sucesión de funciones $f_n(x) = \frac{x}{n}$, con n perteneciente a los naturales y $x \in [0,1]$, converge puntualmente a la función $f(x) = 0$.

3. Considere la sucesión de funciones $f_n(x) = x^n$, con n perteneciente a los naturales y $x \in [0,1]$. Estudie su convergencia puntual.

4. Estudie la convergencia puntual, uniforme y en la norma de la sucesión de funciones dada por $f_n(x) = xe^{-nx}$, con n perteneciente a los naturales y $x \in [0,1]$.

Ortonormalización de Gram-Schmidt

5. Considere el conjunto de funciones $\{x^n\sqrt{1-x^2}\}$, con n perteneciente a los naturales y donde $-1 < x < 1$. Encuentre las primeras 4 funciones ortonormales.

6. Considere el conjunto de funciones $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$, donde $-1 < x < 1$. Encuentre el conjunto de funciones ortonormales correspondientes. Además, exprese la función $f(x) = x^2 - 1$ respecto a la base encontrada.

7. Considere el conjunto de funciones $\{e^x, e^{2x}\}$, donde $-1 < x < 1$. Encuentre el conjunto de funciones ortonormales correspondientes.

8. Muestre que el siguiente conjunto de funciones es un conjunto ortonormal en $[-\pi, \pi]$.

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}\right\}$$

9. Muestre que el siguiente conjunto de funciones es un conjunto ortonormal en $[0, \pi]$.

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 3x\right\}$$

10. Muestre que el siguiente conjunto de funciones es un conjunto ortonormal en $[0, \pi]$.

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 3x\right\}$$

11. Sume

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

con 100 términos. Utilice la suma convencional y la suma de Cesaro

$$S^*_\infty = \lim_{M\to\infty} \sum_{l=0}^{M} \left(1 - \frac{l}{M}\right) T_l.$$

Compare resultados.

12. Evalúe a la Cesaro, para $\omega \neq 0$, la integral

$$^*\int_0^\infty \cos(\omega t) dt.$$

Otros ejercicios.

13. *a*) Pruebe la desigualdad de Schwartz y la desigualdad triangular utilizando los axiomas que definen el producto interno.

    b) Encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que esta desigualdad se transforme en igualdad.

14. *a*) Sea $\{\{\phi_k\}_{k\in I}\}$ un conjunto discreto de vectores ortonormales. Demuestre que para todo vector arbitrario $|\psi\rangle$ arbitrario se satisface la desigualdad de Bessel:

    $$||\psi||^2 \geq \sum_k |\langle\phi_k|\psi\rangle|^2.$$

    ¿En que caso se verifica la igualdad?

    b) Demuestre que el conjunto $\{\phi_k(t) = T^{-1/2} e^{2\pi ikt/T}\}_{k\in Z}$ es un conjunto ortonormal completo en $L^2[0, T]$